VOLUMEN 48
XXXI Verano De la Ciencia
ISSN 2395-9797
www.jovenesenlaciencia.ugto.mx

Espacios simétricos del qutrit

Symmetric spaces of the qutrit

Antonio de Jesús Castillo Moctezuma, Cesar Yael Gómez Gonzalez, José Luis Lucio, Víctor Saúl Martínez Oliva
División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato
adj.moctezuma@ugto.mx, cy.gomezgonzalez@ugto.mx, pplucio@gmail.com, vs.martinezoliva@ugto.mx.

Resumen

El bit, la unidad fundamental de información, establece una profunda conexión entre la información y la física. Al incorporar el mundo cuántico, la información se codifica en sistemas cuánticos dando lugar al qubit, el cual constituye el núcleo de las tecnologías modernas. El qubit es el sistema cuántico más simple y se describe mediante el grupo de simetría $SU(2)$. En el siguiente nivel de complejidad se encuentra el qutrit, gobernado por el grupo $SU(3)$. En este texto comparamos el qubit y el qutrit desde la perspectiva de los espacios simétricos, discutimos aspectos geométricos, las simetrías y propiedades relevantes para la teoría de la información.

Palabras clave: información cuántica, qubit, qutrit, teoría de grupos.

Introducción

Uno de los pilares fundamentales de la teoría clásica de la información es el principio de codificación universal de Shannon (Shannon, 1948, págs. 379–423): independientemente de su origen o significado, cualquier mensaje puede representarse como una secuencia de bits (dígitos binarios 0 o 1). Como consecuencia, el bit surge como una unidad universal de información, mientras que la realización física del soporte desempeña únicamente un papel secundario.

Ya sea que la información consista en una imagen, un sonido o un texto almacenado en un disco magnético, transmitido a través de una fibra óptica o escrito sobre papel, la descripción teórica subyacente permanece inalterada, y la cantidad de información contenida en el mensaje se calcula mediante la entropía de Shannon (Desurvire, 2009) como un número entero de bits. Además, la manipulación de la información requiere energía: por cada bit almacenado, transmitido o borrado, debe invertirse una cantidad determinada de energía.

La teoría cuántica de la información introduce una perspectiva radicalmente diferente. Un sistema cuántico también puede utilizarse para codificar información; sin embargo, el procesamiento de la información depende de manera decisiva de la estructura de su espacio de estados. En particular, la dimensión del espacio de Hilbert y las simetrías que gobiernan su dinámica determinan qué estados pueden prepararse, qué transformaciones pueden implementarse y las correlaciones cuánticas en sistemas compuestos (Demirel, Weng, Thalacker, Hoban, & Barz, 2021).

En contraste con lo que sucede en el tratamiento clásico de la información, distintos portadores cuánticos, como los qubits y los qutrits, no solo son medios alternativos para codificar la información; también poseen distintas propiedades matemáticas y físicas, lo que abre nuevas posibilidades para la comunicación, la computación y la criptografía.

El estado de un sistema cuántico es un vector $|\psi\rangle$ en un espacio vectorial complejo de dimensión D (y dotado con producto interno, i.e. un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$) que satisface la condición de normalización $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Para un qubit, $D = 2$ y el vector $|\psi\rangle$ es

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad \text{con } a_i \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1,$$

mientras que, para un qutrit, $D = 3$ y el vector $|\psi\rangle$ lo escribimos como

$$|\psi\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle + b_2|2\rangle, \quad \text{con } b_i \in \mathbb{C} \text{ y } |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1.$$

En el caso del qubit, describir el estado requiere dos números complejos, lo que equivale a cuatro parámetros reales; sin embargo, la condición de normalización elimina un parámetro y el hecho que en mecánica cuántica una fase global es irrelevante elimina otro parámetro, así que finalmente el estado se describe en términos de dos parámetros reales independientes. En el caso del qutrit la cantidad de parámetros reales independientes que se requieren para describir el estado es cuatro. Volveremos a este punto más abajo.

Lo arriba expresado puede formularse en otros términos. De acuerdo con la mecánica cuántica (Sakurai & Napolitano, 2017), los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle$ no pueden diferenciarse. En ese caso decimos que los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ se encuentran en la misma *clase de equivalencia.* Decimos que dos estados se encuentran en la misma clase de equivalencia si existe una transformación U que los conecta. En el ejemplo previo la transformación es $U = e^{i\delta}$, donde $U \in U(1)$. Lo que nos interesa es

para un estado dado (qubit, qutrit), determinar cuáles son las clases de equivalencia, es decir, queremos identificar cuáles son las transformaciones U que relacionan estados que se consideran equivalentes, así como su interpretación física.

Afortunadamente existe un formalismo desarrollado por los matemáticos (Gilmore, 2006) que aborda este problema y que lo resuelve de forma general, lo que se conoce como *espacios simétricos* (SS, por las siglas en inglés). En este planteamiento se empieza identificando el grupo de simetría G del sistema completo, los espacios simétricos determinan las transformaciones ($H \subset G$) que definen clases de equivalencia del sistema en consideración y cuya interpretación física provee características relevantes del sistema. Lo que sabemos es que, Para los grupos $SU(n)$, la clasificación de los espacios simétricos compactos contiene las familias AI, AII y AIII, presentadas en la Tabla 1., la cual incluye también una involución cuya relevancia será evidente a lo largo del texto.

Tabla 1. *Familias de espacios simétricos compactos de $SU(n)$ y sus involuciones asociadas.*

Familia	Espacio simétrico	Involución en $(\mathfrak{su}(n))$
AI	$\frac{SU(n)}{SO(n)}$	$\Theta(X) = -X^T$
AII	$\frac{SU(2m)}{Sp(m)}$	$\Theta(X) = -JX^TJ^{-1}$
AIII	$\frac{SU(p+q)}{S(U(p)\times U(q))}$	$\Theta(X) = I_{p,q}XI_{p,q}$

En este trabajo comparamos las propiedades físicas de los qutrits con las de los qubits, tomando como base el formalismo de espacios simétricos. En forma muy breve se comentan potenciales aplicaciones del tratamiento aquí descrito.

Formalismo de espacios simétricos

Comenzaremos con el caso del qubit. Lo primero que haremos es identificar el grupo de simetría de nuestro sistema. La manera en que se implementan transformaciones de simetría en mecánica cuántica es a través de transformaciones unitarias (Weinberg, 2015, págs. 74-78), transformaciones U tales que $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, donde I es el operador identidad. Estas transformaciones preservan el producto interno entre vectores,

$$\langle\psi|\phi\rangle \longrightarrow \langle U\psi|U\phi\rangle = \langle\psi|U^{\dagger}U|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle.$$

Si U_1 y U_2 son unitarios, también lo es U_1U_2, además, para cada U unitario podemos garantizar la existencia de su inversa $U^{-1} = U^{\dagger}$ y el operador identidad I es claramente unitario, por lo que el conjunto de las transformaciones unitarias forma el grupo unitario (Keski-Vakkuri, Montonen, & Panero, 2024)

$$U(n) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I_n\}.$$

Luego, para el qubit, en donde el estado del sistema es un vector

$$|\psi\rangle = a_0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix},$$

debemos considerar como grupo de simetría a $U(2)$. En realidad, son las transformaciones de $SU(2)$,

$$SU(2) = \{U \in M_2(\mathbb{C}) \mid U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I_2, \det(U) = 1\},$$

las que serán relevantes para el qubit, pues aplicar transformaciones de $U(2)$ solo añade una fase global que es irrelevante físicamente.

Cuando el sistema interactúa con el entorno o existe una incertidumbre sobre su preparación, es necesario describir el estado mediante la matriz de densidad, así, si preparamos a nuestro sistema con probabilidad p_j en el estado $|\psi_j\rangle$, el estado está descrito por

$$\rho = \sum_j p_j\,|\psi_j\rangle\langle\psi_j|.$$

La matriz de densidad tiene las siguientes propiedades: i) $\rho^{\dagger} = \rho$ (es hermítico), ii) $\rho \geq 0$ (es definida semipositiva) y iii) $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ (cumple esta condición de normalización). Con la matriz de densidad podemos describir tanto estados puros (donde $p_j = \delta_{jk}$ y $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$) como estados mixtos (donde $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$). Para el qubit es posible expresar la matriz de densidad como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}),$$

donde I es la matriz identidad de 2×2, $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ es el llamado *vector de Bloch* y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es un vector cuyas componentes son las matrices de Pauli. Se satisface que $|\vec{r}| \leq 1$ y para

$$|\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

tenemos estados puros, de modo que cada estado puro del qubit corresponde a un punto en una 2-esfera embebida en $\mathbb{R}^3$, la *esfera de Bloch*, mientras que para los estados mezcla

$$|\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 < 1,$$

y los estados corresponden por tanto al interior de la esfera de Bloch. El conjunto completo de estados del qubit, i.e. tanto estados puros como estados mezcla, constituyen la *bola de Bloch.* Un estado puro $|\psi\rangle$ del qubit puede expresarse como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle,$$

en donde $\theta \in [0,\pi]$ y $\phi \in [0,2\pi)$, véase la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** (Smite-Meister, 2009).

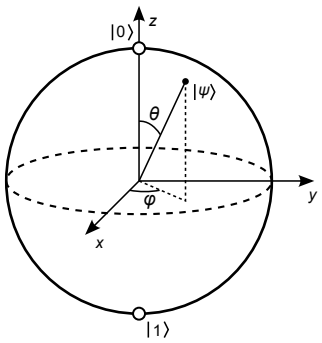

Figura 1 Esfera de Bloch. De Bloch sphere [Imagen], por Notezik, s.f., Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg). Dominio público CC0 1.0.

Podemos también interpretar la aplicación de las transformaciones en $SU(2)$ al estado del qubit desde un punto de vista geométrico mediante la bola de Bloch. Aplicar una transformación $U \in SU(2)$ a la matriz de densidad, $\rho \longrightarrow \rho' = U\rho U^{\dagger}$, equivale a rotar el vector de Bloch, $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}\,' = R\vec{r}$, donde $R \in SO(3)$, con $SO(3) = \{O \in M_3(\mathbb{R}) | O^T O = OO^T = I_3,\ \det(O) = 1\}$ el grupo de rotaciones en tres dimensiones. Entonces, aplicar $SU(2)$ al estado de un qubit es pasar de un punto en la bola de Bloch o a otro.

El álgebra de Lie asociada a $SO(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, viene dada por

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$$

(matrices reales antisimétricas), y el álgebra de Lie asociada a $SU(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, por

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^{\dagger} = -X,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\}$$

(matrices complejas antihermíticas y sin traza).

El caso que nos será de interés para el qubit será el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, donde tenemos tres generadores que podemos elegir como $\{J_i = \sigma_i/2\}$ (otra posible elección —que usaremos más adelante— es $\{i\sigma_i\}$) que satisfacen el álgebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k,$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita (y hay una suma implícita en k). Cualquier transformación $U \in SU(2)$ puede escribirse como

$$U = \exp[-i(\theta J_x + \phi J_y + \chi J_z)],$$

para ciertos parámetros $\theta, \phi, \chi \in \mathbb{R}$.

Una vez que hemos identificado el grupo de simetría del qubit e introducido su álgebra de Lie, podemos empezar con el formalismo de los espacios simétricos. Pero antes vamos a introducir algunas nociones preliminares. Una *involución* (Gilmore, 2006) es una aplicación lineal $\theta: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que es biyectiva y que preserva el corchete de Lie, $\theta([X,Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]$ para todo $X, Y \in g$ (lo que se llama un *automorfismo* de álgebras de Lie) y que además satisface $\theta^2 = I$, i.e. aplicar dos veces θ no produce ningún cambio, $\theta[\theta(X)] = \theta^2(X) = X$. Como consecuencia de esto último, los únicos autovalores posibles de θ son $+1$ y -1, y esto nos permite realizar una descomposición para $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{p},$$

en donde $\mathfrak{I} = \{X : \theta(X) = X\}$ (esto es el conjunto de autovectores de θ con autovalor $+1$, i.e. vectores que permanecen invariantes bajo la involución) y $p = \{X : \theta(X) = -X\}$ (el conjunto de autovectores de θ con autovalor -1, i.e. vectores que cambian de signo bajo la involución). Aquí el símbolo $\oplus$ es llamado suma directa y significa que cualquier $X \in g$ puede escribirse de manera única como $X = X_{\mathfrak{I}} + X_{\mathfrak{p}}$, con $X_{\mathfrak{I}} \in \mathfrak{I}$ y $X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Esta es la llamada *descomposición de Cartan*, y es especial porque satisface relaciones muy especiales. Notemos que para $X, Y \in l$, que son autovectores con autovalor $+1$, $\theta(X) = X$ y $\theta(Y) = Y$, podemos escribir

$$\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)] = [X, Y],$$

lo cual nos indica que el corchete X, Y es también un autovector con autovalor $+1$ y por tanto $[X, Y] \in \mathfrak{I}$. Esto lo denotamos escribiendo $[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}] \subset \mathfrak{I}$. Asimismo, para $X \in l$ y $Y \in p$ se cumple la relación $[\mathfrak{I}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ y para $X, Y \in p$ se tiene $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{I}$.

Para un grupo G y un subgrupo $K \subset G$, podemos construir el *cociente* G/K dado por

$$\frac{G}{H} = \{gH : g \in G\}, \quad \text{donde} \quad gL = \{gh : h \in H\}.$$

La definición previa es general; no se restringe a grupos de Lie. Supongamos ahora que G es un grupo de Lie y existe una involución θ. Entonces l determina un grupo $K = \exp(\mathfrak{I}) \subset G$ que es un subgrupo de G y el cociente $P = G/K$ es un *espacio simétrico.* Un elemento g del grupo de Lie G puede escribirse como $g = ke^X$ con $k \in K$ y $X \in p$. Denotamos esto como $G = KP$, donde $P = \exp(\mathfrak{p})$, y lo llamamos *descomposición* KP.

Como primer ejemplo consideremos el grupo $G = SU(2)$, tomando como generadores a las matrices de Pauli, $\mathfrak{su}(2) = \text{span}\{i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$. Consideremos la involución

$$\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \theta(X) = X^*.$$

Se puede ver que esta preserva el corchete de Lie,

$$\theta([X, Y]) = [X, Y]^* = [X^*, Y^*] = [\theta(X), \theta(Y)],$$

y además

$$\theta^2(X) = \theta(X^*) = X,$$

de modo que efectivamente es una involución. Hemos elegido como generadores a

$$i\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i\sigma_z = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

por lo que es claro que con esta involución obtendremos autovectores con autovalor -1 para los generadores puramente imaginarios ($i\sigma_x$ e $i\sigma_z$) y un autovector con autovalor $+1$ para el generador real ($i\sigma_y$). De este modo,

$$\mathfrak{I} = \text{span}\{i\sigma_y\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \text{span}\{i\sigma_x, i\sigma_z\}.$$

ISSN 2395-9797
www.jovenesenlaciencia.ugto.mx

El subgrupo correspondiente, el que se obtiene con esta involución, es $K = \exp(\mathfrak{l}) = \exp(i\theta\sigma_y)$. Evaluando este exponencial nos damos cuenta de que K es el conjunto de rotaciones en dos dimensiones,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in K = SO(2).$$

Uno puede ver además que el grupo $SO(2)$ es *isomorfo* a $U(1), SO(2) \cong U(1)$. Por lo tanto, el espacio simétrico es $P = SU(2)/U(1)$. Desde el punto de vista geométrico, este espacio simétrico es la 2-esfera, $SU(2)/U(1) = S^2$. Físicamente lo que nos dice que es los estados del qubit $|\psi\rangle$ son equivalentes hasta una transformación del subgrupo $K = U(1)$, determinándonos una clase de equivalencia (algo que ya sabíamos). Para este caso del qubit, considerar diferentes involuciones nos da el mismo espacio simétrico S^2.

Como se señaló anteriormente, las involuciones relevantes para $SU(2)$ conducen a subgrupos isomorfos y, por tanto, al mismo espacio simétrico $SU(2)/U(1)$. Para hacer explícita la construcción de las clases de equivalencia, resulta conveniente emplear la involución de la familia AIII,

$$\Theta_{\mathrm{AIII}}(X) = \sigma_3 X \sigma_3,$$

para la cual la descomposición de Cartan es

$$\mathfrak{l} = \mathrm{span}\{i\sigma_3\}, \qquad \mathfrak{p} = \mathrm{span}\{i\sigma_1, i\sigma_2\}.$$

Esta elección no modifica el espacio simétrico obtenido previamente; únicamente permite identificar de manera directa el subgrupo $K = \exp(\mathfrak{l}) \simeq U(1)$ con el estabilizador de una matriz de densidad diagonal.

Para aplicar este resultado a los estados del qubit, consideramos como matriz de densidad diagonal de referencia

$$\rho_d = \frac{1}{2}(I + r\sigma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1+r}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-r}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le r \le 1.$$

El parámetro $r$determina los autovalores de ρ_d y, por tanto, el grado de mezcla del estado. Cualquier matriz de densidad del qubit puede obtenerse mediante una transformación unitaria,

$$\rho = U\rho_d U^\dagger, \qquad U \in SU(2).$$

Para identificar los parámetros físicamente independientes recurrimos a la descomposición KAK. La involución considerada produce los $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{p}$ correspondientes. Como el espacio simétrico $SU(2)/U(1)$ tiene rango uno, puede elegirse como subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{a} = \mathrm{span}\{i\sigma_2\}.$$

Por consiguiente, los factores de la descomposición están dados por

$$K = \exp(\mathfrak{l}), \qquad A = \exp(\mathfrak{a}),$$

y un elemento general de $SU(2)$ puede escribirse como

$$U = e^{-i\sigma_3\phi/2}e^{i\sigma_2\theta/2}e^{-i\sigma_3\gamma/2}.$$

Al sustituir esta expresión en la transformación de la matriz de densidad se obtiene

$$\rho = e^{-i\sigma_3\phi/2}e^{i\sigma_2\theta/2}e^{-i\sigma_3\gamma/2}\rho_d e^{i\sigma_3\gamma/2}e^{-i\sigma_2\theta/2}e^{i\sigma_3\phi/2}.$$

Debido a que ρ_d está construida a partir de I y σ_3, conmuta con el último factor perteneciente a K:

$$e^{-i\sigma_3\gamma/2}\rho_d e^{i\sigma_3\gamma/2} = \rho_d.$$

El parámetro γ corresponde, por tanto, a una transformación del estabilizador de ρ_d y no genera un nuevo estado físico. En consecuencia, la matriz de densidad puede escribirse de manera reducida como

$$\rho = KA\rho_d A^\dagger K^\dagger,$$

donde

$$K = e^{-i\sigma_3\phi/2}, \qquad A = e^{i\sigma_2\theta/2}.$$

La parametrización final del estado general depende únicamente de los tres parámetros (r, θ, ϕ).

Aquí r determina el grado de mezcla, mientras que θ y ϕ determinan la orientación del estado. Para $r = 1$ se obtienen los estados puros sobre la superficie de la esfera de Bloch; para $0 < r < 1$, los estados mixtos de su interior; y para $r = 0$, el estado máximamente mezclado, invariante bajo todas las transformaciones de $SU(2)$. De esta manera, el espacio simétrico permite eliminar el parámetro redundante asociado al estabilizador y obtener directamente la parametrización mínima del estado general del qubit.

Espacios simétricos del qutrit

Pasemos ahora al caso del qutrit. Un qutrit es un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert tiene dimensión $D = 3$. En la base computacional $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$, un estado puro general puede escribirse como

$$|\psi\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle + b_2|2\rangle, \qquad b_i \in \mathbb{C},$$

con la condición de normalización

$$|b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1.$$

Los tres coeficientes complejos contienen inicialmente seis parámetros reales. La condición de normalización elimina uno de ellos, mientras que la irrelevancia física de la fase global elimina otro. Por tanto, un estado puro de un qutrit queda determinado por cuatro parámetros reales independientes.
Una parametrización posible del estado puro es

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + e^{i\phi_1}\sin\theta\cos\chi\,|1\rangle + e^{i\phi_2}\sin\theta\sin\chi\,|2\rangle,$$

Donde

$$0 \le \theta, \chi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \phi_1, \phi_2 < 2\pi.$$

Las transformaciones unitarias que actúan sobre este espacio pertenecen al grupo $U(3)$. Si U pertenece a $U(3)$, entonces su determinante tiene módulo uno y puede escribirse como $\det(U) = e^{i\delta}$. Definimos una nueva transformación mediante $V = e^{-i\delta/3}U$. Esta transformación continúa siendo unitaria y, además, tiene determinante uno. Por tanto, V pertenece a $SU(3)$ y la transformación original puede expresarse como

VOLUMEN 48
XXXI Verano De la Ciencia
ISSN 2395-9797
www.jovenesenlaciencia.ugto.mx

$U = e^{i\delta/3}V$. Al actuar sobre un estado, el factor exponencial introduce únicamente una fase global, la cual no tiene consecuencias observables. En consecuencia, las transformaciones físicamente relevantes de un qutrit pueden estudiarse mediante el grupo:

$$SU(3) = \{U \in M_3(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = UU^\dagger = I_3, \quad \det(U) = 1\}.$$

El grupo $SU(3)$ tiene dimensión ocho y sus transformaciones pueden describirse mediante los ocho generadores de Gell-Mann, λ_a, con $a = 1, \dots, 8$. Utilizando esta base, la matriz de densidad general de un qutrit puede expresarse como

$$\rho = \frac{1}{3}I_3 + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} r_a \lambda_a,$$

donde $r_a \in \mathbb{R}$ son las componentes del vector de Bloch generalizado del sistema (Byrd, 1998).

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre para el qubit, la condición sobre la longitud del vector de Bloch generalizado no basta para garantizar que ρ sea una matriz de densidad física. Sus componentes deben satisfacer restricciones adicionales provenientes de la condición de positividad de ρ. Por esta razón, el espacio de estados del qutrit no constituye simplemente una bola de ocho dimensiones y su geometría es considerablemente más complicada que la bola de Bloch.

Una transformación U perteneciente a $SU(3)$ actúa sobre la matriz de densidad mediante

$$\rho \mapsto \rho' = U\rho U^\dagger.$$

Esta transformación preserva la traza, la positividad, la pureza y los autovalores de ρ. Por tanto, las matrices de densidad relacionadas mediante conjugación unitaria poseen el mismo espectro y el mismo grado de mezcla, aunque pueden representar orientaciones diferentes dentro del espacio de estados. Para $SU(3)$, se toma $p = 2$ y $q = 1$, la familia AIII conduce al espacio simétrico

$$\frac{SU(3)}{S\big(U(2) \times U(1)\big)} \simeq \mathbb{CP}^2, \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{CP}^2) = 8 - (4 + 1 - 1) = 4.$$

El subgrupo $S(U(2) \times U(1))$ está formado por transformaciones que preservan el rayo de un estado de referencia, por ejemplo $|2\rangle$, y la condición Simpone determinante total igual a uno. Por ello, el cociente identifica los estados que difieren por una transformación del estabilizador y representa el espacio de estados puros del qutrit, cada uno descrito por cuatro parámetros reales independientes.

La involución asociada a esta familia está definida mediante la matriz

$$I_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y actúa sobre un elemento X de $su(3)$ como

$$\Theta_{\mathrm{AIII}}(X) = I_{2,1} X I_{2,1}.$$

Como la involución satisface $\Theta_{\mathrm{AIII}}^2(X) = X$, sus autovalores son +1 y −1. Esto induce la descomposición de Cartan $\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{I} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_8\}$ contiene los generadores invariantes bajo la involución, mientras que $\mathfrak{p} = \{\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\}$ contiene los generadores que cambian de signo. Las propiedades de una descomposición de Cartan garantizan que

$$[\mathfrak{I}, \mathfrak{I}] \subseteq \mathfrak{I}, \qquad [\mathfrak{I}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{I}.$$

Al nivel del grupo, un elemento de $SU(3)$ puede separarse en factores asociados a ambos subespacios. Esquemáticamente, podemos escribir $U = PK$, con

$$K \in S\big(U(2) \times U(1)\big), \qquad P \in \exp(\mathfrak{p}).$$

Esta separación permite distinguir las transformaciones que recorren una misma clase de equivalencia. Para extender el procedimiento a estados mixtos, comenzamos con una matriz de densidad diagonal,

$$\rho_d = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

donde $p_i \geq 0 \quad y \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Como únicamente dos poblaciones son independientes, podemos escribir

$$\rho_d = \frac{1}{3} I_3 + \alpha\lambda_3 + \beta\lambda_8.$$

Explícitamente,

$$\rho_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Los parámetros α y β determinan los tres autovalores de la matriz de densidad y, por tanto, su espectro y grado de mezcla. Para que el estado sea físicamente admisible, las tres entradas diagonales deben ser no negativas. Ademas toda matriz de densidad puede diagonalizarse mediante una transformación unitaria:

$$\rho = U\rho_d U^{\dagger}.$$

Para un estado mas general, en el cual los tres autovalores son distintos, los generadores diagonales λ_3 y λ_8 conmutan con ρ_d. Por ello, las transformaciones generadas por ellos no modifican la matriz diagonal:

$$e^{i(a_3\lambda_3 + a_8\lambda_8)} \rho_d e^{-i(a_3\lambda_3 + a_8\lambda_8)} = \rho_d.$$

Estos dos parámetros pertenecen al estabilizador de ρ_d y no introducen nuevos grados de libertad en la matriz de densidad. En cambio, los generadores λ_1 y λ_2, contenidos también I, mezclan los dos primeros niveles y actúan de forma no trivial cuando p_1 es diferente de p_2.

Después de eliminar los dos parámetros del estabilizador, una matriz de densidad genérica queda determinada por

$$\underbrace{2}_{\text{parámetros espectrales}} + \underbrace{2}_{\text{parte efectiva de } K} + \underbrace{4}_{\text{transformaciones de } P} = 8$$

parámetros reales independientes. Esto concuerda con el hecho de que una matriz hermítica de 3 × 3, con traza igual a uno, posee ocho parámetros reales. Así, la matriz de densidad general puede expresarse esquemáticamente como

$$\rho = PK_{\text{ef}}\rho_d K_{\text{ef}}^{\dagger} P^{\dagger},$$

donde K_{ef} contiene únicamente la parte de K que actúa de manera no trivial sobre ρ_d.

Además del espacio simétrico de la familia AIII, el grupo $SU(3)$ admite un segundo espacio simétrico inequivalente, perteneciente a la familia AI:

$$\frac{SU(3)}{SO(3)}.$$

Este espacio se obtiene a partir de la involución definida sobre el álgebra $\mathfrak{su}(3)$ por

$$\Theta_{\text{AI}}(X) = -X^T, \qquad X \in \mathfrak{su}(3).$$

VOLUMEN 48
XXXI Verano De la Ciencia
ISSN 2395-9797
www.jovenesenlaciencia.ugto.mx

Como los elementos de $\mathfrak{su}(3)$ son matrices antihermíticas, se cumple que $X^\dagger = -X$, y, por tanto, $-X^T = X^*$. En consecuencia, la involución puede interpretarse también como conjugación compleja. En términos de las matrices de Gell-Mann, estos los subespacios que aparecen debido a la descomposición de Cartan son:

$$\mathfrak{l}=\text{span}\{\lambda_2,\lambda_5,\lambda_7\}\simeq\mathfrak{so}(3) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{p}=\text{span}\{\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_6,\lambda_8\}.$$

Los elementos de $\mathfrak{l}$ son matrices reales y antisimétricas. Su exponenciación genera el subgrupo de rotaciones

$$K = \exp(\mathfrak{l}) = SO(3).$$

Por otro lado, los elementos de $\mathfrak{p}$ son matrices imaginarias y simétricas, con traza nula. Estos cinco generadores corresponden a las direcciones de $SU(3)$ que no pertenecen al subgrupo de rotaciones. La dimensión de $SU(3)$ es ocho, mientras que la dimensión de $SO(3)$ es tres. En consecuencia,

$$\dim\left(\frac{SU(3)}{SO(3)}\right) = \dim SU(3) - \dim SO(3) = 8 - 3 = 5.$$

Esta dimensión coincide con el número de generadores contenidos en $\mathfrak{p}$. Por ello, los cinco elementos proporcionan las cinco direcciones independientes del espacio simétrico en el punto correspondiente a la identidad.
Debe observarse que el espacio $SU(3)/SO(3)$ no es el espacio completo de matrices de densidad del qutrit. Es un espacio de clases de equivalencia de transformaciones, construido al considerar físicamente equivalentes aquellas que difieren por una rotación de $SO(3)$.

Para estudiar globalmente las transformaciones del grupo, se introduce una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$contenida en $\mathfrak{p}$. Una elección posible es

$$\mathfrak{a} = span\{\lambda_3, \lambda_8\}.$$

Los generadores λ_3 e λ_8 conmutan entre sí, por lo que un elemento del subgrupo abeliano correspondiente puede escribirse como

$$A = \exp[(\eta_3\lambda_3 + \eta_8\lambda_8)].$$

La descomposición de Cartan permite expresar un elemento general de $SU(3)$ en la forma $U = K_1AK_2$, donde $K_1, K_2 \in SO(3)$. Para elementos genéricos, K_1 aporta tres parámetros rotacionales y A aporta dos parámetros independientes. De esta manera se recuperan los cinco parámetros del espacio simétrico:

$$\underbrace{3}_{K_1} + \underbrace{2}_{A} = 5.$$

Esta parametrización permite separar las rotaciones, contenidas en $SO(3)$, de las transformaciones no rotacionales que caracterizan a las diferentes clases del cociente.

Estados invariantes bajo $SO(3)$:

Puede plantearse ahora una pregunta diferente: ¿qué matrices de densidad permanecen invariantes bajo todas las rotaciones de $SO(3)$? Esta condición se expresa como

$$R\rho R^\dagger = \rho \qquad \text{para todo } R \in SO(3).$$

En la representación irreducible tridimensional, una matriz que conmuta con todas las rotaciones debe ser proporcional a la identidad. Por tanto, $\rho = cI_3$. La condición de normalización $\text{Tr}(\rho) = 1$ implica que $c = \frac{1}{3}$, y se obtiene

$$\rho_{\text{d}} = \frac{1}{3}I_3.$$

Este es el estado máximamente mezclado del qutrit. Sin embargo, este resultado no significa que el espacio $SU(3)/SO(3)$ contenga únicamente dicho estado. La matriz $I_3/3$ es solamente el único estado que permanece invariante bajo todas las rotaciones. De hecho, también satisface

$$U\rho_{\mathrm{d}}U^{\dagger} = \rho_{\mathrm{d}} \qquad \text{para todo } U \in SU(3),$$

por lo que su invariancia no es exclusiva de $SO(3)$. El espacio simétrico completo continúa teniendo cinco dimensiones y describe transformaciones que no pueden identificarse mediante una rotación. El estado máximamente mezclado representa solamente el punto completamente invariante de esta construcción. La aparición de cinco direcciones independientes puede comprenderse considerando el espacio de tensores simétricos de rango dos en tres dimensiones. Una matriz simétrica de 3×3 posee seis componentes independientes.

$$\mathbf{6} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{5}.$$

Así, la descomposición identifica un singlete rotacional y cinco componentes no triviales que se transforman entre sí bajo $SO(3)$.

Implementación del qutrit

Sabemos que el qubit se puede implementar como un sistema de dos niveles, que se asocia con un espín *1/2* en un campo magnético. De manera analoga podemos pensar al qutrit como un sistema de tres niveles el cual puede realizarse con una partícula de espín *1* en un campo magnético. Otras realizaciones son, por ejemplo, un sistema de tres rendijas sobre las que se hace incidir un ente cuántico o un sistema de tres niveles como el nivel $^4I_{11/2}$ del Eb. Por su potencial interés didáctico a continuación presentamos el caso del oscilador armónico tridimensional isotrópico, explicamos como ahí surge la simetría $SU(3)$ y una posible realización del qutrit.

En mecánica cuántica un oscilador armónico unidimensional (Sakurai & Napolitano, 2017) se describe mediante el hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

los autovalores de energía son $E_{n_x} = (n_x + 1/2)\hbar\omega$ y los autoestados se denotan como $|n_x\rangle$. Para el oscilador tridimensional isotrópico el hamiltoniano es

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

los autovalores de energía son $E_n = (n + 3/2)\hbar\omega$ y los autoestados (Murgan & Zender, 2018) son $|\varphi\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle = |n_x n_y n_z\rangle$, con $n = n_x + n_y + n_z$. El estado base se obtiene para $n_x = n_y = n_z = 0$ con energía $E_0 = (3/2)\hbar\omega$ y corresponde a $|0\rangle = |000\rangle$; el primer estado excitado con energía $E_1 = (5/2)\hbar\omega$ se obtiene tomando $n = 1$ (dos de los tres n_i iguales a cero y el n_i restante igual a *1*) y tiene asociado el estado más general posible

$$|\psi\rangle = \alpha|100\rangle + \beta|010\rangle + \gamma|001\rangle, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

lo cual es un estado de un espacio vectorial complejo de dimensión $D = 3$, i.e., un qutrit. Los estados normalizados de este espacio vectorial, con producto interno apropiadamente definido, tienen como simetría al grupo $SU(3)$, de dimensión *8*. El hamiltoniano arriba especificado es invariante ante rotaciones, es decir, tiene como grupo de simetría a $SO(3)$, de dimensión *3*, cuyos generadores son las componentes del momento angular L_x, L_y y L_z. Aunque no es evidente, además de conmutar con los L_i, el hamiltoniano H conmuta con un tensor simétrico T_{ij} que tiene justo *5* componentes independientes, de manera que $\{L_i, T_{ij}\}$ son equivalentes a los *8* generadores de $SU(3)$. En resumen, el primer estado excitado de un oscilador armónico tridimensional es una realización del qutrit.

Conclusiones

Para el qubit, las diferentes involuciones conducen esencialmente al mismo espacio simétrico, $SU(2)/U(1)$. Este cociente identifica como equivalentes los estados que difieren únicamente por una fase global. En consecuencia, los estados puros quedan descritos por dos parámetros angulares, mientras que para los estados mixtos se añade un parámetro radial que representa el grado de mezcla dentro de la esfera de Bloch.

Para el qutrit aparecen dos espacios simétricos inequivalentes. La descomposición asociada a la familia AIII,

$$\frac{SU(3)}{S\big(U(2)\times U(1)\big)},$$

permite parametrizar los estados puros mediante cuatro ángulos y extender la descripción a estados mixtos

mediante seis parámetros angulares y dos parámetros espectrales o de mezcla. En contraste, la familia AI,

$$\frac{SU(3)}{SO(3)},$$

define clases de equivalencia bajo rotaciones y posee cinco direcciones independientes no rotacionales. El estado máximamente mezclado, $\rho = I_3/3$, aparece como el único estado invariante bajo todas las rotaciones; en la realización del oscilador tridimensional corresponde al sector escalar o singlete, pero no representa por sí solo todo el espacio $SU(3)/SO(3)$.

El análisis mediante espacios simétricos permite identificar las transformaciones que generan cada clase de equivalencia, eliminar grados de libertad redundantes y construir una parametrización del estado general asociado a cada clase. De esta manera, el formalismo relaciona la estructura algebraica de $SU(2)$ y $SU(3)$ con las propiedades físicas de los qubits y qutrits.

Referencias

Byrd, M. (1998). Differential geometry on SU(3) with applications to three state systems. *Journal of Mathematical Physics*, *39*(11), 6125–6136. https://doi.org/10.1063/1.532618

Demirel*et al.,* (2021). *Correlations for computation and computation for correlations.* npj Quantum Information.

Desurvire, E. (2009). *Classical and Quantum Information Theory: An Introduction for the Telecom Scientist.* Cambridge University Press.

Gilmore, R. (2006). *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications.* Dover Publications .

Keski-Vakkuri*et al.,* (2024). *Mathematical Methods for Physics: An Introduction to Group Theory, Topology and Geometry.* Cambridge University Press.

Murgan,*et al.,* (2018). Energy eigenlues of the three-dimensional quantum harmonic oscillator from SU(3) cubic Casimir operator. *Eur. Phys. J.*

Sakurai, J., & Napolitano, J. (2017). *Modern Quantum Mechanics.* Cambridge University Press.

Shannon, C. E. (1948). *A mathematical theory of communication.* The Bell System Technical.

Smite-Meister. (2009, enero 30). *Bloch sphere*. Retrieved from Wikimedia Commons: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg

Weinberg, S. (2015). *Lectures on Quantum Mechanics.* Cambridge University Press.