

# MODELO MATEMÁTICO PARA DETERMINAR LA CINETOSTÁTICA DE UN MECANISMO DE SEIS BARRAS

Saavedra Balderas, Fabián Alejandro (1), Ortega Herrera, Francisco Javier (2), Tapia Tinoco, Guillermo (3), Razón González, Juan Pablo (4)

1 Estudiante de Ingeniería Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato | Dirección de correo electrónico: fsaavedrabalderas@gmail.com

2 Coordinación de Ingeniería Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato | Dirección de correo electrónico: frortega@itesi.edu.mx

3 Coordinación de Ingeniería Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato | Dirección de correo electrónico: gutapia@itesi.edu.mx

4 Coordinación de Ingeniería Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato | Dirección de correo electrónico: jurazon@itesi.edu.mx

## Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático para calcular la posición, velocidad, aceleración, las fuerzas y pares actuantes en cada elemento del mecanismo, como caso de estudio se considera el mecanismo de seis barras de Stephenson. Para realizar el análisis cinemático se utiliza el método de lazo cerrado, el cual permite determinar la posición, velocidad y aceleración de todos los eslabones del mecanismo, la solución del problema de posición se realiza mediante el método de Newton-Raphson, por su parte, el problema de velocidad y el problema de aceleración se resuelve formando dos sistemas matriciales. Una vez resuelto el problema cinemático del mecanismo, se obtiene como resultado final un sistema matricial de 15 x 15 para resolver la cinetostática del mecanismo. La ventaja del sistema desarrollado radica en que es realizado en forma paramétrica, lo cual permite que sea válido para cualquier longitud de los eslabones y para cualquier condición inicial del mecanismo.

## Abstract

In this paper a mathematical model is developed to calculate the position, velocity, acceleration, forces and torque acting on each element of the mechanism, as a case study is considered Stephenson six-bar linkage. To perform kinematic analysis method closed loop, which allows determining the position, velocity and acceleration of each link mechanism is used, the solution of the problem of position is performed by the method of Newton-Raphson, meanwhile, the problem of speed and acceleration problem is solved by forming two matrix systems. Once solved the problem kinematic mechanism, a matrix system of 15 x 15 is obtained as a final result to resolve the cinetostática of mechanism. The advantage of the developed system is that it is made in parametric form, allowing valid for any length of the links and any initial condition of the mechanism.

## Palabras Clave

Eslabonamiento; Análisis; Mecanismo; Stephenson; Cinemática; Cinética

## INTRODUCCIÓN

Un mecanismo es un sistema de elementos acomodados para transmitir movimiento de una forma predeterminada [1]. Un mecanismo se define como un medio de transmisión, control o restricción del movimiento relativo [2].

Varias investigaciones se han realizado sobre el tema de análisis de mecanismos entre las más importantes se pueden mencionar las siguientes. En [3] se muestra la solución del análisis dinámico de un mecanismo plano de seis barras con contrapesos y se muestran los efectos que la presencia de contrapesos tiene sobre los resultados del análisis dinámico. En [4] se desarrolla una metodología para la síntesis de tipo y dimensional de mecanismos utilizando algoritmos genéticos y ecuaciones algebraicas exactas a partir de partes de cuerpos y movimientos descritos por el usuario e incorpora una mayor cantidad de resoluciones a situaciones y mejoramiento del criterio de optimalidad.

Por su parte en [5] se plantea y se soluciona el problema de síntesis de posición y velocidad de mecanismos de cuatro barras empleando diseño óptimo dimensional e implementando algoritmos de optimización no-lineales. En [6] se presenta el análisis cinemático y una metodología de diseño paramétrico de la falange proximal para un dedo antropomórfico de un grado de libertad, muestran el análisis comparativo entre los resultados de la cinemática obtenidos numéricamente y los experimentales.

Finalmente, en [7] se presenta un procedimiento para realizar la síntesis de un mecanismo que cumpla con las condiciones definidas para múltiples puntos de precisión. Para la generación de guiado de un cuerpo se extiende la aplicación tradicional, mecanismo de cuatro eslabones, a mecanismos de seis eslabones. La metodología empleada para la obtención del mecanismo utiliza los procedimientos propios de los algoritmos genéticos.

El conocer la posición, velocidad y aceleración de los eslabones de un mecanismo es la parte inicial de un análisis, para posteriormente determinar las fuerzas y torques que soportan dichos eslabones, lo cual, es la base para determinar los esfuerzos y por consiguiente la sección transversal que deben

tener los eslabones para que soporten los esfuerzos a los cuales están sometidos.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático el cual permite determinar la cinetostática (cinemática y cinética) de un mecanismo de seis barras de Stephenson.

## MATERIALES Y MÉTODOS

El análisis cinemático se realiza utilizando el método de lazo cerrado, En la Imagen 1 se presenta el mecanismo bajo estudio junto con su representación vectorial. Partiendo de la Imagen 1 se obtiene el sistema vectorial mostrado en las Ecuaciones (1), (2), (3) y (4).

$$R_2 + R_3 - R_4 - R_5 - R_1 = 0 \quad (1)$$

$$R_6 + R_7 - R_8 - R_1 = 0 \quad (2)$$

$$\theta_2 = \theta_6 + \alpha \quad (3)$$

$$\theta_8 = \theta_5 + \beta \quad (4)$$

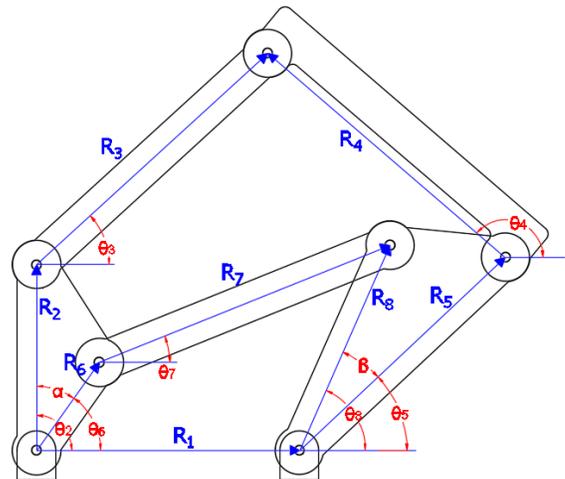


IMAGEN 1: Representación vectorial del mecanismo analizado

Una vez planteado el sistema vectorial, las Ecuaciones (1) y (2) se representan en función de sus números complejos como se presentan en las Ecuaciones (5) y (6), la nomenclatura utilizada en estas Ecuaciones se presenta en la Imagen 2,

$$be^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} - de^{j\theta_4} - ee^{j\theta_5} - ae^{j\theta_1} = 0 \quad (5)$$

$$fe^{j\theta_6} + ge^{j\theta_7} - he^{j\theta_8} - ae^{j\theta_1} = 0 \quad (6)$$

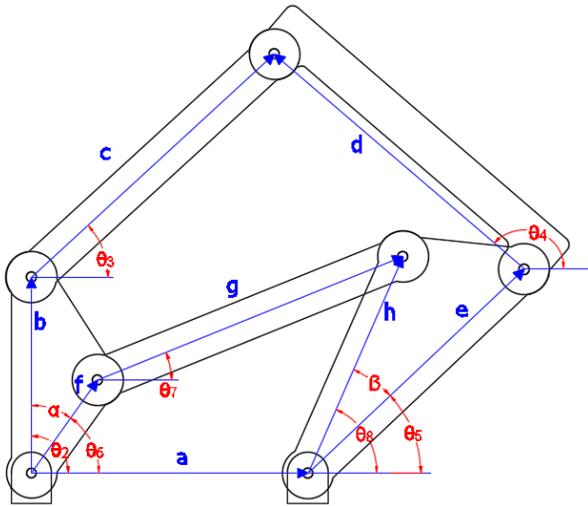


IMAGEN 2: Nomenclatura para la realización del análisis cinemático del mecanismo

Las Ecuaciones (3) a (6) representan el problema de posición del mecanismo analizado, derivando dichas Ecuaciones respecto al tiempo se obtienen las Ecuaciones de velocidad del mecanismo, las cuales son representadas por (7) a (10).

$$bj\dot{\theta}_2 e^{j\theta_2} + cj\dot{\theta}_3 e^{j\theta_3} - dj\dot{\theta}_4 e^{j\theta_4} - ej\dot{\theta}_5 e^{j\theta_5} = 0 \quad (7)$$

$$fj\dot{\theta}_6 e^{j\theta_6} + gj\dot{\theta}_7 e^{j\theta_7} - hj\dot{\theta}_8 e^{j\theta_8} = 0 \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_6 \quad (9)$$

$$\dot{\theta}_8 = \dot{\theta}_5 \quad (10)$$

Derivando respecto al tiempo las Ecuaciones (7) a (10) se obtienen las Ecuaciones de aceleración del mecanismo representadas por (11) a (14).

$$bj\ddot{\theta}_2 e^{j\theta_2} - b\dot{\theta}_2^2 e^{j\theta_2} + cj\ddot{\theta}_3 e^{j\theta_3} - c\dot{\theta}_3^2 e^{j\theta_3} - \dots - dj\ddot{\theta}_4 e^{j\theta_4} + d\dot{\theta}_4^2 e^{j\theta_4} - ej\ddot{\theta}_5 e^{j\theta_5} + e\dot{\theta}_5^2 e^{j\theta_5} = 0 \quad (11)$$

$$fj\ddot{\theta}_6 e^{j\theta_6} - f\dot{\theta}_6^2 e^{j\theta_6} + gj\ddot{\theta}_7 e^{j\theta_7} - g\dot{\theta}_7^2 e^{j\theta_7} - \dots - hj\ddot{\theta}_8 e^{j\theta_8} + h\dot{\theta}_8^2 e^{j\theta_8} = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_6 \quad (13)$$

$$\ddot{\theta}_8 = \ddot{\theta}_5 \quad (14)$$

Una vez planteados los problemas de posición, velocidad y aceleración se proceden a desarrollar el diagrama de cuerpo libre para las fuerzas del mecanismo mostrado en la Imagen 3.

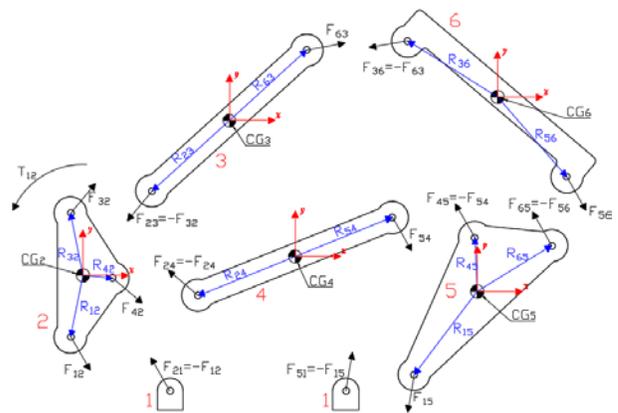


IMAGEN 3: Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que soportan los eslabones del mecanismo

Partiendo de la Imagen 4 se procede a realizar la sumatoria de fuerzas en las direcciones "x" y "y", además de sumatoria de momentos en el eje "z", para el eslabón motriz, las Ecuaciones (15), (16) y (17) representan dichas sumatorias.

$$F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} = m_2 a_{G_2x} \quad (15)$$

$$F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} = m_2 a_{G_2y} \quad (16)$$

$$(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) + (R_{42x}F_{42y} - R_{42y}F_{42x}) + \dots + (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + T_{12} = I_{G_2} \alpha_2 \quad (17)$$

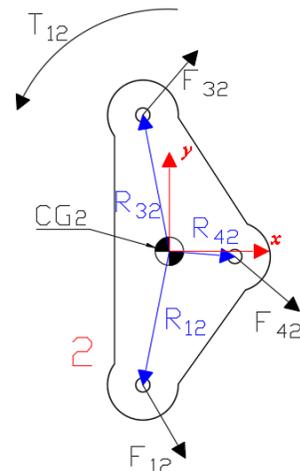


IMAGEN 4: Diagrama de cuerpo libre del eslabón motriz

En la siguiente sección se presentan los sistemas matriciales obtenidos para resolver la cinetostática del mecanismo analizado.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para resolver la cinetostática del mecanismo bajo estudio se considera que el eslabón 2 es el eslabón motriz, por lo cual su posición, velocidad y aceleración angular son conocidas en todo momento. Por lo cual finalmente se obtienen los sistemas matriciales representados por (18) a (21).

El sistema matricial (18) resuelve el problema de posición, el (19) el problema de velocidad y el (20) el problema de aceleración, finalmente el sistema matricial (21) resuelve la cinética del mecanismo.

El sistema matricial (18) se puede resolver mediante el método de Newton-Raphson y los sistemas matriciales (19) a (21) se pueden resolver mediante la inversión del sistema matricial.

$$\begin{bmatrix} F & -H & -J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & N & -Q \\ E & -G & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & M & -P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B-D \\ B \\ A-C \\ A \\ \theta_2 - \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 E & \dot{\theta}_4 G & \dot{\theta}_5 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\theta}_6 K & -\dot{\theta}_7 M & \dot{\theta}_8 P \\ \dot{\theta}_3 F & -\dot{\theta}_4 H & -\dot{\theta}_5 J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\theta}_6 L & \dot{\theta}_7 N & -\dot{\theta}_8 Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 C \\ 0 \\ -\dot{\theta}_2 D \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 E & \dot{\theta}_4 G & \dot{\theta}_5 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{\theta}_6 K & -\dot{\theta}_7 M & \dot{\theta}_8 P \\ \dot{\theta}_3 F & -\dot{\theta}_4 H & -\dot{\theta}_5 J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\theta}_6 L & \dot{\theta}_7 N & -\dot{\theta}_8 Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ S \\ T \\ U \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A &= a \sin \theta_1 \\ B &= a \cos \theta_1 \\ C &= b \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$D = b \cos \theta_2$$

$$E = c \sin \theta_3$$

$$F = c \cos \theta_3$$

$$G = d \sin \theta_4$$

$$H = d \cos \theta_4$$

$$I = e \sin \theta_5$$

$$J = e \cos \theta_5$$

$$K = f \sin \theta_6$$

$$L = f \cos \theta_6$$

$$M = g \sin \theta_7$$

$$N = g \cos \theta_7$$

$$P = h \sin \theta_8$$

$$Q = h \cos \theta_8$$

$$R = b\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + b\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + c\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - d\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 - e\dot{\theta}_5^2 \cos \theta_5$$

$$S = f\dot{\theta}_6^2 \cos \theta_6 + g\dot{\theta}_7^2 \cos \theta_7 - h\dot{\theta}_8^2 \cos \theta_8$$

$$T = -b\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + b\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + c\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - d\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 - e\dot{\theta}_5^2 \sin \theta_5$$

$$U = f\dot{\theta}_6^2 \sin \theta_6 + g\dot{\theta}_7^2 \sin \theta_7 - h\dot{\theta}_8^2 \sin \theta_8$$

La solución de estos sistemas para valores numéricos específicos permite obtener la solución cinetostática del mecanismo analizado.

Como se mencionó al principio de este trabajo, la ventaja del sistema desarrollado radica en que es realizado en forma paramétrica, lo cual permite que sea válido para cualquier longitud de los eslabones y para cualquier condición inicial del mecanismo.

## CONCLUSIONES

El análisis cinemático forma parte del proceso de diseño de un mecanismo, por lo que es fundamental conocer el movimiento de cada uno de los elementos del sistema mecánico, ya que es de gran importancia que el diseño de un mecanismo no solo sea de precio razonable y se ajuste al espacio disponible, sino también que sea confiable e insensible a cambios en la manufactura y desgaste, para que dicho mecanismo sea óptimo y cumpla su función correctamente.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & -R_{42y} & R_{42x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & 0 & 0 & -R_{63y} & R_{63x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{45y} & -R_{45x} & -R_{15y} & R_{15x} & R_{65y} & -R_{65x} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{36y} & -R_{36x} & 0 & 0 & -R_{56y} & R_{56x} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{56y} & R_{56x} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{42x} \\
 F_{42y} \\
 F_{63x} \\
 F_{63y} \\
 F_{54x} \\
 F_{54y} \\
 F_{15x} \\
 F_{15y} \\
 F_{56x} \\
 F_{65y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{2x} \\
 m_2 a_{2y} \\
 I_{G2} \ddot{\theta}_2 \\
 m_3 a_{3x} \\
 m_3 a_{3y} \\
 I_{G3} \ddot{\theta}_3 \\
 m_4 a_{4x} \\
 m_4 a_{4y} \\
 I_{G4} \ddot{\theta}_4 \\
 m_5 a_{5x} \\
 m_5 a_{5y} \\
 I_{G5} \ddot{\theta}_5 \\
 m_6 a_{6x} \\
 m_6 a_{6y} \\
 I_{G6} \ddot{\theta}_6
 \end{bmatrix}
 \quad (21)$$

Además de los datos cinemáticos, el cálculo de fuerzas requiere solo de las masas, las ubicaciones de los centros de gravedad y los momentos de inercia de masa contra los centros de gravedad para estar completo. Estos tres parámetros geométricos caracterizan por completo al elemento para propósitos de modelado dinámico.

El uso de herramientas computacionales de CAD permite desarrollar el ensamble de un mecanismo con el objetivo de conseguir que su funcionamiento sea el esperado, ya que estos programas de computadora permiten diseñar todas las piezas del ensamble de acuerdo a las especificaciones que se tengan, por lo que ayuda a disminuir el error que pueda llegar a existir al momento de desarrollar el prototipo en físico del mecanismo.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, el Gobierno del Estado de Guanajuato y al Instituto Tecnológico Superior de Irapuato por el apoyo presentado para la realización del presente proyecto mediante

## REFERENCIAS

- [1] Norton, R. L., (2011). *Desing of Machinery* (4th ed.) USA: McGraw-Hill
- [2] Hunt, K. H., (1978). *Kinematic Geometry of Mechanisms* (1st ed.). USA: Oxford University Press.
- [3] Rico, J. M., (2012). *Análisis Dinámico de un Mecanismo plano de seis barras con contrapesos*. Salamanca, México: Universidad de Guanajuato
- [4] Pucheta, M., Cardona, A. (2004). *Software para síntesis de mecanismos planos*. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC). Santa Fe, Argentina.
- [5] Galeano, C. H., Duque, C. A. & Garzón, D. A. (2009) *Aplicación de diseño óptimo dimensional a la síntesis de posición y velocidad en mecanismos de cuatro barras*. *Fac. Ing. Univ. Antioquia* N° 47 pp. 129-144
- [6] Portilla, E. A., Avilés, O. F., Quintero, R. P., Niño, P. A., Moya, E. & Molina, M. A. (2010) *Análisis cinemático y diseño de un mecanismo de cuatro barras para falange proximal de dedo antropomórfico*. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, Vol. 20-1, pp. 45-59.
- [7] Quintero, H. F., Trujillo, G. C., Diaz, A. (2004) *Síntesis de generación de trayectoria y de movimiento para múltiples posiciones en mecanismos, utilizando Algoritms Genéticos*. *Scientia et Technica* Año X, No 25