

Análisis cuantitativo de similitud para sistemas de control utilizando coeficiente de correlación

Quantitative similarity analysis for control systems using correlation coefficients

Mtro. Luis Daniel Sánchez Gloria¹, Dr. Carlos Rodríguez Doñate¹, Dr. Omar Palillero Sandoval², Dr. Jacob González Villagómez¹, Dr. Esaú González Villagómez¹

¹Universidad de Guanajuato, Departamento de Estudios Multidisciplinarios División de Ingenierías Campus Irapuato – Salamanca.

²Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Centro de investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas.

ld.sanchezgloria@ugto.mx¹

Resumen

En muchas situaciones prácticas los sistemas de primer orden abarcan múltiples plantas, por lo cual el análisis y diseño de un sistema de control fiable para estos sistemas es de suma importancia. Uno de los controladores más utilizados para estos sistemas son los controladores tipo P, debido a su fácil implementación y baja demanda de recursos computacionales. Para poder emplear el controlador es necesario realizar un análisis exhaustivo del sistema a controlar y los parámetros de diseño que el usuario requiera. En este trabajo se presenta un método de análisis enfocado en brindar nuevas alternativas matemáticas para el diseño de controladores y solventar problemas en el área de control, a través del coeficiente de correlación e iteraciones, que evalúan la similitud entre la respuesta deseada y las diversas respuestas del sistema con ganancia K_p variable, con el objetivo de obtener el comportamiento óptimo con respecto a la respuesta deseada. Los resultados obtenidos demuestran que el método logra identificar la respuesta óptima del sistema, al igual que un análisis cuantitativo y geométrico que proporcionan alternativas de estudio para el diseño de controladores. Es importante señalar que el coeficiente de correlación no ha sido utilizado para el análisis de sistemas de control, por lo cual el enfoque permitirá ampliar esta área de investigación.

Palabras clave: Sistema de control de primer orden, Análisis iterativo de sintonización, Control proporcional.

Introducción

A través de los años el control automático ha sido uno de los eslabones más importantes en el avance de la ingeniería y la ciencia, debido a que se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas robóticos, mecánicos, hidráulicos, industriales e incluso aportando herramientas relevantes en múltiples áreas como la medicina o la agronomía [1, 2]. Su principal tarea es regular y optimizar el comportamiento de la planta a controlar, garantizando que opere de manera eficiente, precisa y autónoma, cumpliendo objetivos predefinidos en su respuesta. En la literatura los sistemas de control se clasifican de acuerdo con sus acciones de control, como: Controladores on-off, Proporcionales (P), Integrales (I), Proporcionales – Integrales (PI), Proporcionales – Derivativos (PD) o Proporcionales-Integrales-Derivativos (PID). Pero antes de seleccionar un tipo de controlador el primer paso para analizar y diseñar un sistema de control es obtener el modelo matemático del sistema, la herramienta matemática utilizada para este proceso es la transformada de Laplace la cual simplifica el análisis de sistemas dinámicos en el dominio del tiempo y permite trabajar con ecuaciones algebraicas en el dominio complejo en lugar de ecuaciones diferenciales. Aplicando esta técnica los sistemas se pueden clasificar de acuerdo con su modelo matemático, como: en sistemas de primer orden, segundo orden y orden superior [3-6].

En muchas situaciones prácticas los sistemas de primer orden abarcan múltiples plantas, como: circuito RC (Resistencia – Capacitor), sistemas térmicos, sistemas de amortiguación sin masa, reacciones químicas, sistemas hidráulicos, modelo de crecimiento o decaimiento exponencial, etc., por lo cual el análisis y diseño de un sistema de control fiable para estos sistemas es de suma importancia [3,5]. Para seleccionar un óptimo controlador, depende de las características del sistema y los requisitos del usuario como el tiempo de asentamiento (t_s), la sobreelongación (M_p), el error en estado estacionario (e_{ss}), la estabilidad, entre muchas otras características. Sin embargo, uno de los controladores más utilizados es el tipo P, debido a su fácil

implementación y baja demanda de recursos computacionales. Para poder emplear este controlador es necesario realizar una correcta ponderación de la ganancia proporcional (K_p), a este proceso se le conoce como sintonización. En el caso donde se realice un mal proceso de sintonización provocará error de rendimiento en el sistema, por ejemplo, en una maquina se reflejará en la precisión de sus movimientos, generación de vibraciones no deseadas, consumo de energía, etc. [7-9], por este motivo, es indispensable tener un proceso de sintonización que permita obtener un ajuste lo suficientemente eficiente. Entre los múltiples estudios de la literatura se han utilizado métodos de sintonización convencionales, como: el lugar geométrico de las raíces (LGR) el cual emplea un análisis geométrico a partir del movimiento de las raíces de la ecuación característica, donde el usuario necesita un cierto conocimiento del método para predecir el comportamiento del sistema [1,10-12], por otro lado, los diagramas de Bode parten de un análisis frecuencial que consta de dos gráficas, magnitud de la función de transferencia sinusoidal y ángulo de fase [1,13] o utilizando algoritmos más complejos como algoritmos genéticos, evolutivos o redes neuronales donde su análisis se fundamenta en la combinación de posibilidades, bases de datos o métodos metaheurísticos [14-16].

Bajo este contexto, este trabajo presenta una novedosa metodología de análisis basada en un método iterativo utilizando como criterio el coeficiente de correlación, proporcionando nuevas alternativas matemáticas para el diseño de controladores tipo P para sistemas de primer orden. La metodología utiliza como base conceptos convencionales de ingeniería de control, como: sobreelongación (M_p), tiempo de asentamiento (t_s) y la respuesta ante una entrada escalón. A partir de estos conceptos, se calcula el coeficiente de correlación de la respuesta deseada y la respuesta del sistema de control de primer orden con ganancia variable y bajo un esquema iterativo se realiza un análisis cuantitativo para identificar la relación que existe entre ellas y así obtener el valor óptimo de la ganancia K_p que mejor se adapte a la respuesta deseada. Cabe destacar que el coeficiente de correlación no ha sido utilizado para el análisis de sistemas de control, por lo cual el enfoque permitirá ampliar esta área de investigación. La comprobación de la metodología se realizó mediante simulaciones y obteniendo un resultado eficiente.

Metodología Propuesta

La metodología de análisis se fundamenta en cuantificar el grado de similitud entre la respuesta deseada (RD) y las respuestas generadas por el del sistema de control de primer orden (SCPO) con ganancia variable K_p , con el fin de obtener el comportamiento más cercano a la respuesta deseada. Esto es posible con ayuda del coeficiente de correlación " r ", que se describe como una medida que cuantifica la fuerza de la relación lineal entre dos variables. Si las dos variables tienen el mismo número de datos N , el coeficiente de correlación entre A y B se define por la ecuación (1) [17-18].

$$r = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i - \mu_A}{\sigma_A} \right) \left(\frac{B_i - \mu_B}{\sigma_B} \right) \quad (1)$$

Donde μ_A y σ_A son la media y desviación estándar de A, respectivamente, y μ_B y σ_B son la media y desviación estándar de B. El coeficiente de correlación es un valor adimensional que varía entre 1 y -1. Los valores positivos de r indican que ambas variables A y B tienden a incrementar simultáneamente, mientras que los valores negativos muestran que cuando A aumenta, B disminuye de manera proporcional. Además, si r se aproxima a ± 1 , se refleja una alta similitud entre A y B, mientras que un valor r más cercano a 0 indica una falta de relación entre ambas variables.

El diagrama de bloques de la propuesta se ilustra en la figura 1.



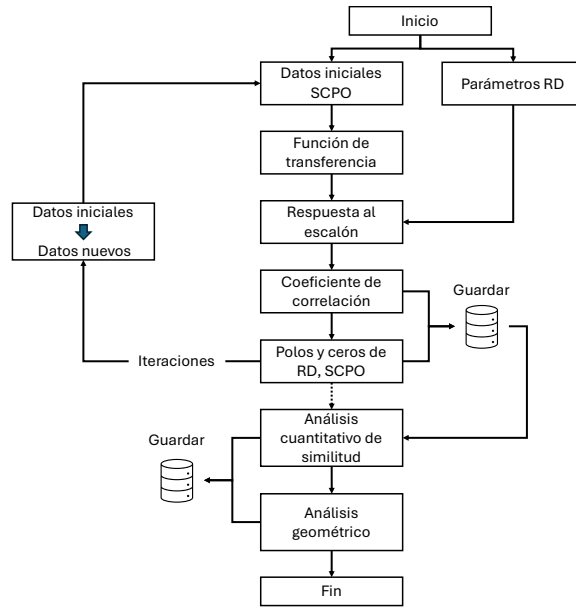


Figura 1. Diagrama de bloques general de la metodología propuesta.
Fuente: Autoría propia.

Como se puede ver en el diagrama, el método requiere como parámetros de diseño M_p y t_s para generar la respuesta deseada (RD), esto con ayuda de la función de transferencia general de un sistema de segundo orden en lazo cerrado en el dominio de Laplace definida por la ecuación (2) [3].

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

Donde ζ es el factor de amortiguamiento relativo, ω_n es la frecuencia natural no amortiguada y s es la variable compleja.

Por otro lado, se definirá los datos iniciales T y K_p para estimar la función de transferencia de un sistema de control de primer orden (SCPO), la cual está definido por la ecuación (3) [3].

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Ts + K_p} \quad (3)$$

A partir de la función de transferencia de RD y SCPO, se obtendrá la respuesta al escalón unitario de cada una de ellas, una vez obtenido los resultados, se calcula y guarda el coeficiente de correlación (r) entre ambas funciones, al igual que los polos y ceros individuales de las funciones. El proceso anterior se ejecutará un número finito de iteraciones (MaxIte) incrementando consecutivamente la ganancia K_p de los datos iniciales de la función de transferencia de SCPO ($\text{Inc}K_p$), después de que el algoritmo llegue al número máximo de iteraciones, se realizará un análisis cuantitativo de similitud utilizando los datos guardados de r identificando el valor máximo obtenido (MaxR), al igual que la ganancia K_p con el que obtuvo la respuesta óptima (Max K_p), posteriormente utilizando el LGR se realizará un análisis geométrico de los polos y ceros entre la función de transferencia de SCPO con el valor de Max K_p y la función de transferencia de RD, considerando la distancia y ángulo que existe entre ellos. Finalmente, este proceso se repetirá con múltiples valores de $T = 1, 2, 3, \dots$, MaxT para SCPO, con el fin de comparar y analizar los resultados obtenidos, identificando alguna relación entre la respuesta de RD y la respuesta del SCPO.

Resultados



Para validar la metodología propuesta, se utilizaron los siguientes parámetros:

- Parámetros RD: $M_p=1$ y $t_s=1$.
- Datos iniciales SCPO: $K_p = 0.01$ y $T = 1$.
- Iteraciones: factor de incremento K_p ($\text{Inc}K_p$) = 0.01, número máximo de iteraciones (MaxIte) = 15,000 y $\text{MaxT} = 40$.

Cabe mencionar que $\text{Inc}K_p$, IteMax y el número de iteraciones para T (MaxT) fue determinado de manera heurística y considerando la carga computacional.

En la figura 2 se observar la gráfica de movimiento del coeficiente de correlación al ejecutar cada iteración para un valor de $T = 1$ en SCPO, en ella se identifica cuatro ejemplos del valor de r entre la respuesta del escalón de la función de transferencia de SCPO al aumentar K_p (SCPO1, SCPO2, SCPO3 y SCPO4) y RD, mostrando la evolución del algoritmo. Por otra parte, en la figura 3 se muestra el movimiento de los polos de SCPO al aumentar K_p , destacando los ejemplos anteriores.

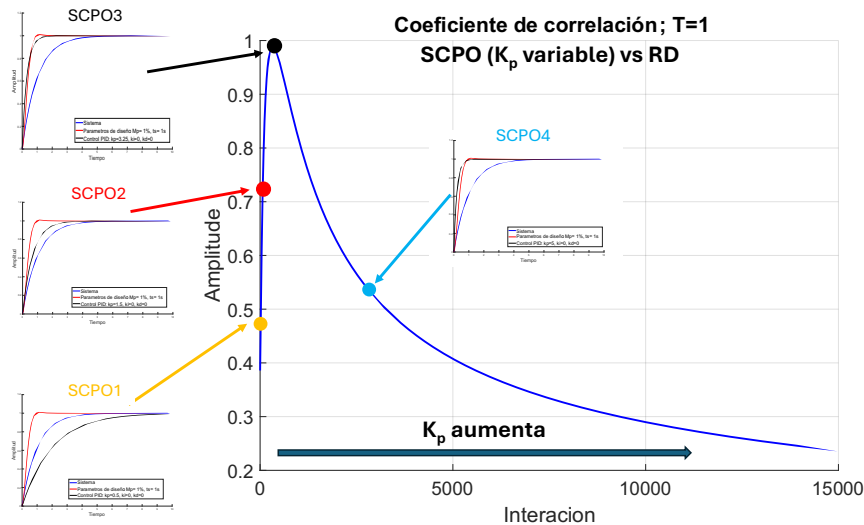


Figura 2. Coeficiente de correlación.
Fuente: Autoría propia.

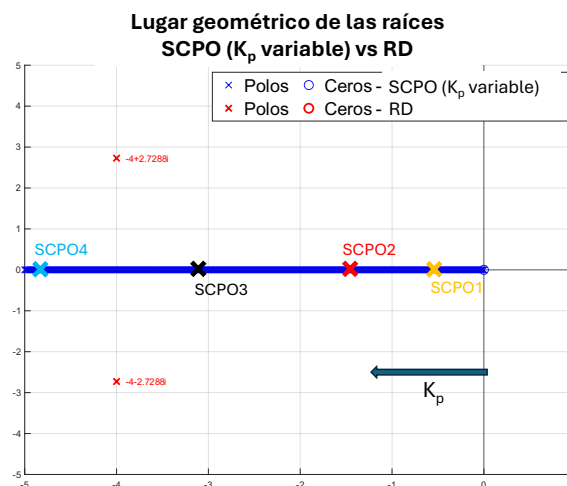


Figura 3. Lugar geométrico de las raíces.
Fuente: Autoría propia.

Una vez calculado el valor r para las múltiples respuestas de SCPO, se realiza un análisis cuantitativo de similitud considerando el valor más alto junto con el valor de la ganancia K_p con el que obtuvo la respuesta

óptima (SCPO3), posteriormente se realiza el análisis geométrico utilizando el LGR como se muestra en la figura 4.

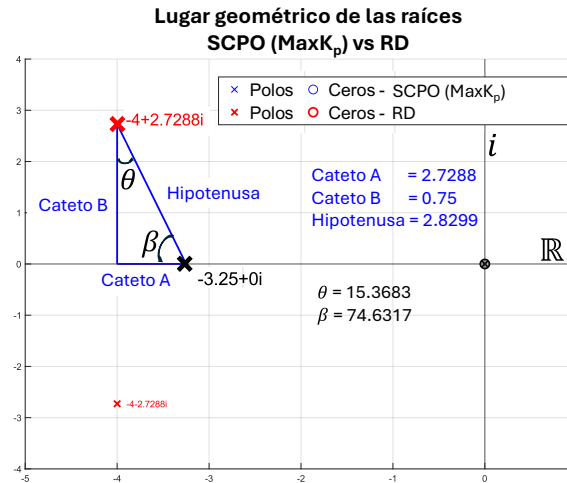


Figura 4. Lugar geométrico de las raíces.
Fuente: Autoría propia.

El proceso anterior se realizará nuevamente para múltiples valores de $T = 1, 2, 3, \dots, 40$. Las comparaciones de los resultados obtenidos se muestra en las siguientes figuras. La figura 5 muestra los valores de la ganancia K_p con el que obtuvo la respuesta óptima (MaxK_p) y la figura 6 muestra los valores de r indicando el grado de similitud que existe respectivamente. Por otro lado, las figuras 7, 8, 9, 10 muestran los valores de distancia y ángulo que existen entre los polos de SCPO con la ganancia MaxK_p y los polos de RD.

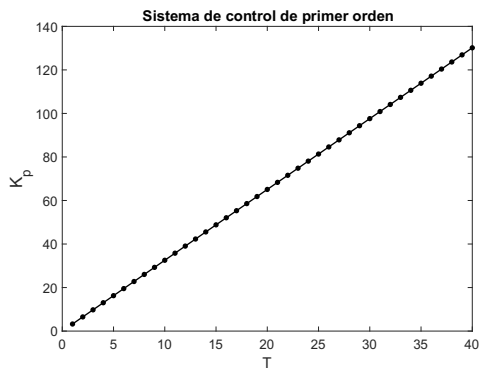


Figura 5. Valor de K_p para diferentes valores de T .
Fuente: Autoría propia.

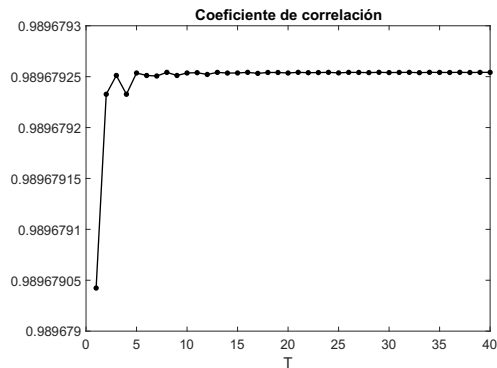


Figura 6. Valor máximo del coeficiente de correlación para diferentes valores de T .
Fuente: Autoría propia.

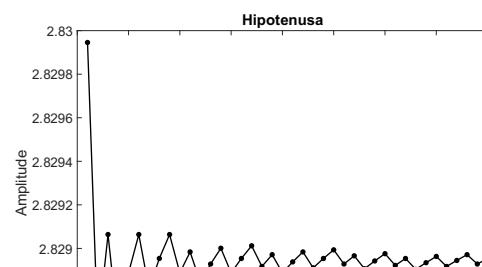
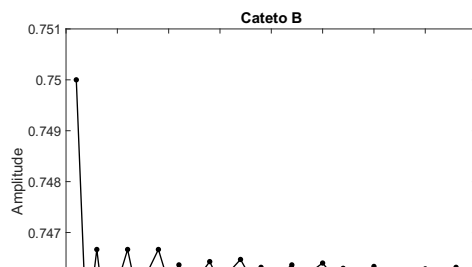


Figura 7. Valor del cateto B para diferentes valores de T.
Fuente: Autoría propia.

Figura 8. Valor de la hipotenusa para diferentes valores de T.
Fuente: Autoría propia.

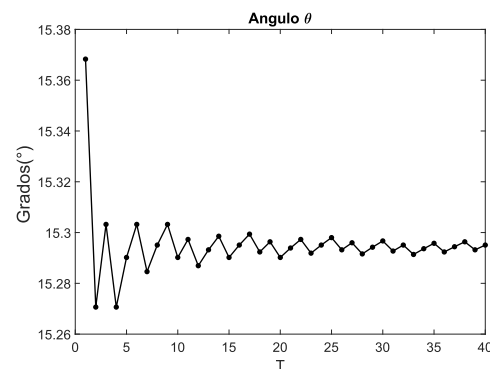
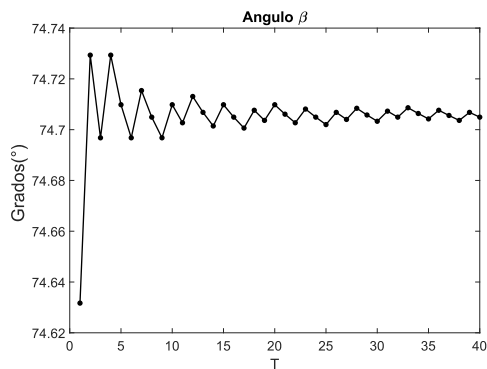


Figura 9. Valor del ángulo β para diferentes valores de T.
Fuente: Autoría propia.

Figura 10. Valor del ángulo θ para diferentes valores de T.
Fuente: Autoría propia.

Conclusión

La nueva metodología de análisis está enfocada en encontrar una respuesta óptima de un sistema de control de primer orden en base a parámetros de diseño seleccionados por el usuario (M_p y t_s), esto es posible a través del coeficiente de correlación e iteraciones, que evalúan la similitud entre la respuesta deseada y las diversas respuestas del sistema con ganancia K_p variable. Los resultados obtenidos de K_p muestran un aumento constante conforme va aumentando T, mientras que el coeficiente de correlación converge a un valor de 0.9896793. Por otro lado, el análisis geométrico en cada uno de los términos (cateto B, hipotenusa, ángulo θ y β) presenta un movimiento de salto que conforme aumenta T converge a un valor determinado en los diferentes casos. Es importante señalar que la metodología no está enfocada en la sintonización de los controladores, si no de encontrar alternativas matemáticas que puedan solventar problemas en el área de control, solo utilizando conceptos ampliamente utilizados en la teoría de control automático como la respuesta ante una entrada escalón, LGR, el M_p , el t_s y herramientas matemáticas como el coeficiente de correlación, el cual no ha sido utilizado para el análisis de sistemas de control, por lo cual el enfoque permitirá ampliar esta área de investigación.

Referencias

- [1] K. L. Luna, E. R. Palacios and A. Marin. (2018). A Fuzzy Speed Controller for a Guide Robot Using an HRI Approach. IEEE Lat. Am. T. 16 (8), 2102-2107.
- [2] H. Zhang, W. Assawinchaichote and Y. Shi. (2021) New PID Parameter Autotuning for Nonlinear Systems Based on a Modified Monkey Multiagent DRL Algorithm. IEEE Access, 9, 78799 – 78811.
- [3] Ogata, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna (5ta edición). Pearson, 2010.
- [4] Dorf, Richard C., Bishop, Robert H. Sistemas de Control Moderno (12va edición). Pearson, 2011.



- [5] Franklin, Gene F., Powell, J. David, Emami-Naeini, Abbas. Control de Sistemas Dinámicos (7ma edición). Pearson, 2014.
- [6] Astrom, Karl J., and Hagglund, Tore. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning (2da edición). ISA, 1995.
- [7] Zaky, M. S. (2015). A self-tuning PI controller for the speed control of electrical motor drives. *Electric Power Systems Research*, 119, 293-303.
- [8] Xie, Y., Jin, J., Tang, X., Ye, B., & Tao, J. (2018). Robust cascade path-tracking control of networked industrial robot using constrained iterative feedback tuning. *IEEE Access*, 7, 8470-8482.
- [9] Heertjes, M. F., Van der Velden, B., & Oomen, T. (2015). Constrained iterative feedback tuning for robust control of a wafer stage system. *IEEE transactions on control systems technology*, 24(1), 56-66.
- [10] Jaldin, E. P. C., Silvestre, E. R. R., Carpio, A. C. E., & Rosas, P. V. (2020). Controlador Digital Proporcional Usando "ARDUINO UNO" para el Control de Nivel de Líquido de un Tanque. *Journal Boliviano de Ciencias*, 16(48), 85-100.
- [11] Zhou, W., & Longman, R. W. (2020). Root locus of zeros of discrete time systems as a function of sample rate. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 67, 164-187.
- [12] Moir, T. J. (2022). A study on square root control-systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 406, 113938.
- [13] Miyani, P. B., & Sant, A. V. (2022). Bode diagram based control system design of three phase grid tied photovoltaic systems with Quasi-Z source inverter. *Materials Today: Proceedings*, 62, 7248-7254.
- [14] J. Aguila-Leon, C. Chinas-Palacios, V. S. Carlos, E. Hurtado-Perez, and E. X. M. Garcia, (2021). Particle swarm optimization, genetic algorithm and grey wolf optimizer algorithms performance comparative for a DC-DC boost converter PID controlle, *Adv. sci. technol. eng.*, 6 (1), 619-625.
- [15] Zhao, L., He, W., & Lv, F. (2021). Model-free adaptive control for parafoil systems based on the iterative feedback tuning method. *IEEE Access*, 9, 35900-35914.
- [16] Dastres, R., & Soori, M. (2021). Artificial neural network systems. *International Journal of Imaging and Robotics (IJIR)*, 21(2), 13-25.
- [17] Lalinde, J. D. H., Castro, F. E., Rodríguez, J. E., Rangel, J. G. C., Sierra, C. A. T., Torrado, M. K. A., ... & Pirela, V. J. B. (2018). Sobre el uso adecuado del coeficiente de correlación de Pearson: definición, propiedades y suposiciones. *Archivos venezolanos de Farmacología y Terapéutica*, 37(5), 587-595.
- [18] Taylor, R. (1990). Interpretation of the correlation coefficient: a basic review. *Journal of diagnostic medical sonography*, 6(1), 35-39.

