

Estudio teórico-experimental de las ondas longitudinales fotoacústicas con simetría axial en el espacio de frecuencias

Theoretical and experimental study of photoacoustic longitudinal waves with axial symmetry in frequency space

Fabian Chávez Moreno^{1*} | Bruno Escobedo Adang^{1*} | Diego Macias Gutiérrez^{1*} | Javier Orlando Páramo Sánchez^{1*} | Jorge Zanon Ruíz Frausto^{2*} | Orlando Miguel Medina-Cázares³ | Lenin Francisco Escamilla Herrera³ | Gerardo Gutiérrez-Juárez⁴

1. Universidad de Guanajuato | Campus León | DCI División de Ciencias e Ingenierías | estudiante de la Licenciatura en Física.
 2. Universidad de Guanajuato | Campus León | DCI División de Ciencias e Ingenierías | estudiante de la Licenciatura en Ingeniería Física.
 3. Universidad de Guanajuato | Campus León | DCI División de Ciencias e Ingenierías | Departamento de Ingeniería Física | Posdoctorante del programa Científicos y Científicas por México CONAHCYT
 4. Universidad de Guanajuato | Campus León | DCI División de Ciencias e Ingenierías | Departamento de Ingeniería Física
- * Igual contribución, ordenados alfabéticamente.
chavezmf2020@licifug.ugto.mx | b.escobeadang@ugto.mx | d.maciasgutierrez@ugto.mx | jo.paramosanchez@ugto.mx | jz.ruizfrausto@ugto.mx | lescamilla@fisica.ugto.mx | om.medina@ugto.mx | ggutj@fisica.ugto.mx |

Resumen

Se resolvió un problema de valores en la frontera para las ondas fotoacústicas, u ondas longitudinales del Ultrasonido Inducido por Láser (USIL). El problema se define con la ecuación de onda para la presión en las tres regiones que ocupa una muestra plana inmersa en un fluido, y se resolvió en dos dimensiones con simetría axial en el espacio de Fourier. Las condiciones de fronteras son tipo Cauchy en una superficie abierta, suponiendo que no hay fuentes de ultrasonido en el fluido. Los cambios diferenciales de las soluciones se analizaron numéricamente, encontrando que el ancho de banda es fuertemente dependiente de ancho del pulso láser. Experimentalmente se obtuvieron resultados preliminares, sin embargo, se muestra el ancho de banda es muy acotado. Estos resultados sugieren nuevas rutas numéricas y experimentales para abordar este problema.

Palabras clave: Ultrasonido Inducido por Láser, ondas longitudinales, efecto fotoacústico; funciones de Bessel.

Introducción

En régimen termoelástico, se acepta que la generación y propagación que las ondas longitudinales del Ultrasonido Inducido por Láser (USIL) se describe completamente mediante la ecuación de difusión de calor para la temperatura, $T(\mathbf{r}, t)$, junto con la ecuación de onda para la presión, $P(\mathbf{r}, t)$ [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \nabla^2\right) T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho_0 C_p} H(\mathbf{r}, t) + \frac{T_0 \beta}{\rho_0 C_p} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) P(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} c^2 \rho_0 \beta T(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

Aquí χ es la difusividad térmica; ρ_0 y T_0 son la densidad de masa y la temperatura iniciales, respectivamente. C_p es la capacidad calorífica a presión constante; c la velocidad del LIUS en el material; y β el coeficiente de expansión térmica. En la Ec. (1), $H(\mathbf{r}, t)$ es la función de calentamiento, definida como la densidad de energía electromagnética por unidad de tiempo absorbida por la muestra. Esta función depende de cómo la muestra absorbe, y ha sido modelada como

$$H(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

donde $\mu(\mathbf{r}, t)$ es el coeficiente de absorción óptica de la muestra y $I(\mathbf{r}, t)$ es la fluencia del láser por unidad de tiempo. El coeficiente de absorción óptica puede depender del tiempo si, durante el tiempo que duran los experimentos, el fotoblanqueo o

el fotodaño inducidos en la zona irradiada son considerables. De lo contrario, se puede ignorar la dependencia temporal de μ [2,3].

La intensidad de un láser CW, en cualquier posición \mathbf{r} dentro de la muestra, se puede escribir como el producto entre la fluencia, $F(\mathbf{r})$ y el perfil temporal del pulso láser (tiempo de irradiación), $\theta(t)$. En el caso de una muestra de la placa plana uniformemente iluminada con absorción tipo Lambert-Beer y con un haz láser pulsado con perfil espacial Gaussiano con un ancho σ cuando la amplitud de $F(\mathbf{r})$ decrece a $1/e$, se puede escribir como [4].

$$F(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{\pi\sigma^2} \exp\left[-\left(\frac{2r}{\sigma}\right)^2\right] \exp[-\mu(\mathbf{r})|z - z_0|], \quad (4)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia cilíndrica-radial desde el eje del haz láser; $E_0/\pi\sigma^2$ es el valor axial de la fluencia del láser en $r = 0$ antes de que incida en la muestra; σ es el valor de r donde la fluencia del haz láser inicial ha decaído a $1/e^2$ desde su valor axial; $|z - z_0|$ es la distancia que ha recorre el haz desde que incidió en la muestra en z_0 . El perfil temporal del pulso láser se puede suponer gaussiano de ancho τ_p cuando la amplitud ha disminuido a $1/e^2$ [1,4,5],

$$\theta(t) = \frac{2}{\tau_p\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right], \quad (5)$$

Para desacoplar las ecuaciones se utilizan dos aproximaciones, a saber:

- **Confinamiento de expansión (SC):** Si $\tau_{ac} \gg \tau_p$, la expansión de volumen fraccional es aproximadamente igual a cero; matemáticamente $V(\mathbf{r}, t) = [\beta T(\mathbf{r}, t) - \kappa_T P(\mathbf{r}, t)]V_0 \approx 0$ [6], de donde

$$P(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\beta}{\kappa_T} T(\mathbf{r}, t).$$

- **Confinamiento térmico (TC)** Si $\tau_{th} \gg \tau_p$ entonces se puede despreciar la difusión de calor; o $-\nabla \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t) \approx 0$

Aquí τ_{th} , $\tau_{ac} = l_{ex}/c$ y τ_p son el tiempo de relajación térmica, el tiempo de relajación acústica y el tiempo del pulso láser, respectivamente. l_{ex} es una longitud característica dada por la fuente USIL, y κ_T es el coeficiente de compresibilidad isotérmica.

Si las condiciones impuestas a SC y TC se cumplen, las Ecs. (1) y (2) se desacoplan quedando

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{\rho_0 C_p \left(1 - \frac{T_0 \beta^2}{\rho_0 C_p \kappa_T}\right)} H(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) P(\mathbf{r}, t) \approx \frac{c^2 \beta}{C_p} \left(1 - \frac{T_0 \beta^2}{\rho_0 C_p \kappa_T}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Debido a que para la mayoría de los materiales se tiene que, $1 \gg T_0 \beta^2 / \rho_0 C_p \kappa_T$ obtenemos la Ecuación de Onda Fotoacústica que describen las ondas longitudinales del USIL

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) P(\mathbf{r}, t) \approx \frac{c^2 \beta}{C_p} \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

En este trabajo, se explorarán, en el dominio de la frecuencia, las soluciones de un problema con valores en la frontera para la ecuación de onda definido por una muestra inmersa en un fluido no viscoso, suponiendo que en la muestra la generación y propagación de las ondas longitudinales del USIL se describe por la ecuación de onda fotoacústica (8). Se supondrá además que el fluido es ópticamente transparente, por lo que no hay generación de USIL en, siendo un medio que sólo lo propaga, por lo que la propagación en este medio se modelara por la ecuación de onda homogénea. Se supondrá además que los perfiles espacial y temporal del pulso láser son gaussianos. Se supondrá que entre la muestra y su entorno hay un desacople de impedancias y que ópticamente sigue la ley de Lambert-Beer. Como modelo experimental y numérico se utilizará una placa de aluminio.

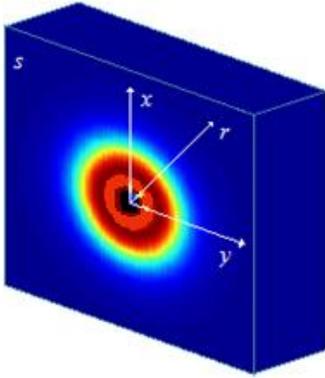


Figura 1. Representación esquemática de la absorción óptica de una losa plana en el área de irradiación, $z = 0$.

Teoría

Modelo de función de calentamiento

De las Ecs. (4) y (5) podemos ver que el término fuente se puede separar como el producto de una función con simetría axial que sólo depende variables espaciales por una que solo depende del tiempo, es decir, $H(\mathbf{r}, t) = F(r, z)\theta(t)$, donde

$$F(r, z) = \mu \frac{2E_0}{\pi\sigma^2} \exp(-\mu|z|) \exp\left[-\left(\frac{2r}{\sigma}\right)^2\right], \quad y \quad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_p}} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right], \quad (9)$$

La Fig. 1 muestra una representación esquemática de la distribución espacial de la absorción óptica para una placa plana.

Definición del problema de valores en frontera para el USIL en 2D

La situación experimental se representa en la Fig. 2. La muestra divide al espacio en tres regiones, las regiones de la izquierda y derecha son un fluido (f) ópticamente no absorbente con densidad de masa ρ_f y velocidad del sonido c_f , que serán llamadas regiones backward (B) y forward (F), respectivamente. El medio entre los fluidos, la muestra (s), es una placa semiinfinita (en las coordenadas x e y) de espesor L , coeficiente de absorción es μ , densidad de masa ρ_s , velocidad del sonido c_s , coeficiente de expansión térmica es β y capacidad calorífica a volumen constante es C_p . Se supone que la radiación electromagnética, que induce el ultrasonido, incide en $z_0 = 0$ con una intensidad E_0 perfiles espacial y temporal dado por las Ecs. (9) representan la distribución de energía por unidad de tiempo que absorbe sólo la muestra. El problema 2D de valores en la frontera para las ondas longitudinales del USIL se define mediante las siguientes ecuaciones de onda, para los campos de presión $P(r, z, t)$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) P_B(r, z, t) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < z < 0; \quad (10a)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) P_S(r, z, t) = -\mathcal{R}(r)\mathcal{Z}(z) \frac{d}{dt}\theta(t), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < z < L; \quad (10b)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) P_F(r, z, t) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad L < z < \infty. \quad (10c)$$

Las condiciones de frontera se obtienen al suponer que en las interfaces fluido-muestra-fluido, las presiones de los medios y las aceleraciones de las partículas de los medios son iguales, es decir

$$\begin{aligned} P_B(r, z, t)|_{z=0} &= P_S(r, z, t)|_{z=0}; & (11a) & \quad P_S(r, z, t)|_{z=L} = P_F(r, z, t)|_{z=L}; & (11b) \\ -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial z} P_B(r, z, t) \Big|_{z=0} &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} P_S(r, z, t) \Big|_{z=0}; & (11c) & \quad -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} P_S(r, z, t) \Big|_{z=L} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial z} P_F(r, z, t) \Big|_{z=L}. & (11d) \end{aligned}$$

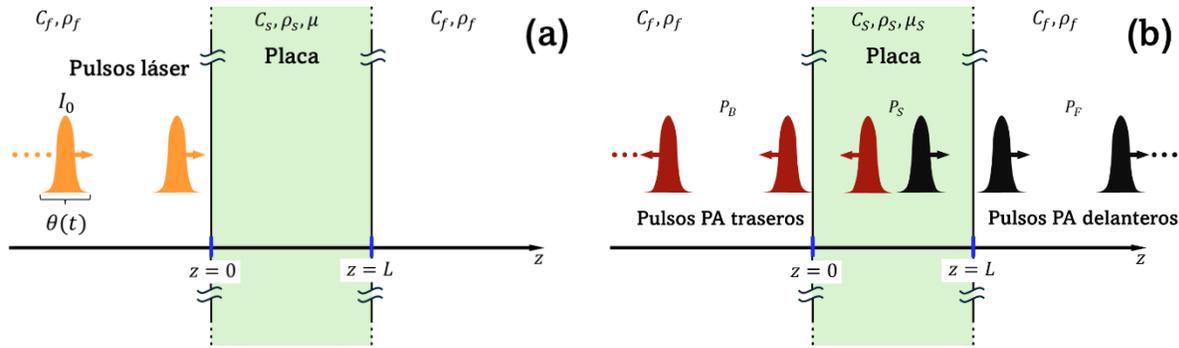


Figura 2. Representación esquemática del modelo físico fotoacústico de una losa plana. (a) Incidencia óptica, (b) Pulsos ultrasónicos inducidos por láser.

En las Ecs. (10) y (11) P_B , P_S y P_F son las presiones inducidas por láser hacia atrás (B), muestra (S) y hacia adelante (F), respectivamente. Además, hemos definido

$$\mathcal{R}(r) \equiv -\frac{P_0}{c_s^2} \exp\left[-\left(\frac{2r}{\sigma}\right)^2\right], \quad Z(z) \equiv \exp(-\mu z), \quad P_0 \equiv \Gamma \frac{\mu E_0}{\pi \sigma^2}, \quad \text{y} \quad \Gamma = \frac{\beta c_s^2}{C_p}.$$

Aplicando la transformada de Fourier al problema de valores en la frontera definido por las Ecs. (10) y (11), se obtiene problema en el espacio de Fourier, así

$$(\nabla^2 + k_f^2)\hat{P}_B(r, z; \omega) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < z < 0; \quad (12a)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2)\hat{P}_S(r, z; \omega) = -i\omega\mathcal{R}(r)Z(z)\hat{\theta}(\omega), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < z < L; \quad (12b)$$

$$(\nabla^2 + k_f^2)\hat{P}_F(r, z; \omega) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad L < z < \infty. \quad (12c)$$

y

$$\hat{P}_B(r, z; \omega)|_{z=0} = \hat{P}_S(r, z; \omega)|_{z=0}; \quad (13a) \quad \hat{P}_S(r, z; \omega)|_{z=L} = \hat{P}_F(r, z; \omega)|_{z=L}; \quad (13b)$$

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{P}_B(r, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \hat{P}_S(r, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad (13c) \quad \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \hat{P}_S(r, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=L} = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{P}_F(r, z; \omega)}{\partial z} \Big|_{z=L}. \quad (13d)$$

el cual se resolverá en el dominio de la frecuencia. En las Ecs. (12), $k_j \equiv \omega/c_j$ es el número de onda del medio $j = s$ o f . Debido a que el término fuente es independiente de la coordenada φ , el problema tiene simetría axial cilíndrica, entonces en coordenadas cilíndricas, y resolverá por el método de separación de variables, es decir, se buscarán soluciones de la forma $\hat{P}_U(r, z; \omega) = \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega)\hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega)$, es decir, por el método de separación de variables. Aquí $U = B, S$ o F , y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia cilíndrica-radial desde el eje del haz láser.

Solución de la ecuación de onda en el fluido ($z < 0$ y $L < z$): $\hat{P}_B(r, z; \omega)$ y $\hat{P}_F(r, z; \omega)$

Considerando al operador Laplaciano en coordenadas cilíndricas, tenemos

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_f^2 \right] \hat{P}_B(r, z; \omega) = 0, \quad \text{para} \quad 0 < r < \infty; \quad -\infty < z < 0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (14a)$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_f^2 \right] \hat{P}_F(r, z; \omega) = 0, \quad \text{para} \quad 0 < r < \infty; \quad L < z < +\infty, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (14b)$$

Proponiendo soluciones de la forma $\hat{P}_U(r, z; \omega) = \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega)\hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega)$ en las Ecs. (14), con $U = B$ o F , tenemos

$$0 = \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \right] + \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) + k_f \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega),$$

dividiendo por $\hat{\mathcal{R}}_B(r; \omega)\hat{\mathcal{Z}}_B(z; \omega) \neq 0$, tenemos

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \right] = - \left[\frac{1}{\hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega)} \frac{d^2}{dz^2} \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) + k_f \right],$$

dado que el lado derecho de la ecuación sólo depende de r y el izquierdo sólo de z , entonces ambas ecuaciones deben ser iguales a una constante, es decir

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \right] = - \left[\frac{1}{\hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega)} \frac{d^2}{dz^2} \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) + k_f \right] = -\eta^2 < 0, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

luego

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) + (k_f - \eta^2) \hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega) = 0 \quad (15a) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) \right] + \eta^2 \hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega) = 0, \quad (15b)$$

Una familia de soluciones para la Ec. (15a) es

$$\hat{\mathcal{Z}}_U(z; \omega, \eta) = A_U(\omega, \eta) e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_U(\omega, \eta) e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}}.$$

donde $A_U(\omega, \eta)$ y $B_U(\omega, \eta)$, son las constantes de integración independientes de z , pero pueden ser funciones de ω y η .

Para obtener una familia de soluciones para la Ec. (1.5b), se realiza el cambio de variable $x = \eta r$, obtenido

$$x \frac{d^2}{dx^2} \hat{\mathcal{R}}_U(x; \omega, \eta) + \frac{d}{dx} \hat{\mathcal{R}}_U(x; \omega, \eta) + x \hat{\mathcal{R}}_U(x; \omega, \eta) = 0, \quad (16)$$

que es la ecuación diferencial de Bessel de primer tipo de orden cero, luego sus soluciones son las funciones de Bessel de primer tipo de orden cero $J_0(\eta r)$ y $Y_0(\eta r)$, entonces las soluciones de la Ec. (16) se pueden escribir como

$$\hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega, \eta) = C_U(\eta, \omega) J_0(\eta r) + D_U(\eta, \omega) Y_0(\eta r), \quad \text{sí} \quad \eta \neq 0$$

$$\hat{\mathcal{R}}_U(r; \omega, \eta) = C'_U(\eta, \omega) + D'_U(\eta, \omega) \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{sí} \quad \eta = 0.$$

Entonces la familia de soluciones de la Ecs. (14) es

$$\hat{\mathcal{P}}_U(r, z; \omega, \eta) = \left[A_U(\omega, \eta) e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_U(\omega, \eta) e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] [C_U(\eta, \omega) J_0(\eta r) + D_U(\eta, \omega) Y_0(\eta r)], \quad \eta \neq 0$$

$$\hat{\mathcal{P}}_U(r, z; \omega, \eta) = [A_U(\omega, \eta) e^{+izk_f} + B_U(\omega, \eta) e^{-izk_f}] \left[C'_U(\eta, \omega) + D'_U(\eta, \omega) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right], \quad \eta = 0.$$

Debido a que: (a) las soluciones deben ser finitas en todo el espacio, (b) cuando $r \rightarrow 0$, $Y_0(\eta r) \rightarrow \infty$, y (c) cuando $r \rightarrow 0$, $\ln(1/r) \rightarrow \infty$, entonces, para tener una solución finita $D_B(\eta, \omega)$ y $D'_B(\eta, \omega)$ deben ser igual a cero; de este modo

$$\hat{\mathcal{P}}_U(r, z; \omega, \eta) = C_U(\eta, \omega) \left[A_U(\omega, \eta) e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_U(\omega, \eta) e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] J_0(\eta r), \quad \text{sí} \quad \eta \neq 0$$

$$\hat{\mathcal{P}}_U(r, z; \omega, \eta) = C'_U(\eta, \omega) [A_U(\omega, \eta) e^{+izk_f} + B_U(\omega, \eta) e^{-izk_f}], \quad \text{sí} \quad \eta = 0.$$

Como $J_0(\eta r) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0$, entonces para $\eta = 0$

$$\hat{\mathcal{P}}_U(r, z; \omega, \eta) = C'_U(\eta, \omega) \left[A_U(\omega, \eta) e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_U(\omega, \eta) e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] J_0(0).$$

Así, una familia de soluciones para las Ecs. (14) son

$$\hat{P}_B(r, z; \omega, \eta) = \left[A_B(\omega, \eta)e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_B(\omega, \eta)e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] J_0(\eta r), \quad \forall \eta \in [0, \infty).$$

La solución general de las Ecs. (14), para $0 < r < +\infty$ y $-\infty < \omega < +\infty$, se obtiene sumando cada una de las soluciones definida por cada una de las η , es decir

$$\hat{P}_B(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) \left[A_B(\omega, \eta)e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_B(\omega, \eta)e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] d\eta, \quad \text{para } -\infty < z < 0, \quad (17a)$$

$$\hat{P}_F(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) \left[A_F(\omega, \eta)e^{+iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} + B_F(\omega, \eta)e^{-iz\sqrt{k_f^2 - \eta^2}} \right] d\eta, \quad \text{para } L < z < +\infty, \quad (17b)$$

Solución de la ecuación de onda dentro de la muestra ($0 < z < L$): $\hat{P}_S(r, z; \omega)$

En la región de la muestra la ecuación de onda está dada por la Ec. (12b), considerando la simetría axial cilíndrica esta se puede escribir como,

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_s^2 \right] \hat{P}_S(r, z; \omega) = \hat{\Theta}(\omega) \frac{P_0}{c_s^2} \exp \left[- \left(2 \frac{r}{\sigma} \right)^2 \right] e^{-\mu z}, \quad \text{para } 0 < z < L, \quad 0 < r < \infty \quad (18)$$

con $\hat{\Theta}(\omega) \equiv -i\omega P_0 \hat{\theta}(\omega) / c_s^2$. La solución general de esta ecuación está dada por la suma de la solución de la ecuación diferencial homogénea, $P_{Sh}(r, z; \omega)$, asociada a $P_S(r, z; \omega)$, más una solución particular de la ecuación inhomogénea $P_{Sp}(r, z; \omega)$, es decir, $\hat{P}_S(r, z; \omega) = P_{Sh}(r, z; \omega) + P_{Sp}(r, z; \omega)$. La solución a la ecuación homogénea está dada por (ver la sección anterior)

$$\hat{P}_{Sh}(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) \left[A_S(\omega, \eta)e^{+iz\sqrt{k_s^2 - \eta^2}} + B_S(\omega, \eta)e^{-iz\sqrt{k_s^2 - \eta^2}} \right] d\eta.$$

Una solución particular a la ecuación diferencial inhomogénea está dada por [7]

$$\hat{P}_{Sp}(r, z; \omega) = \frac{\sigma^2}{4} \hat{\Theta}(\omega) \exp(-\mu z) \int_0^\infty \frac{\eta J_0(\eta r)}{(k_s^2 - \eta^2) + \mu^2} \exp \left[- \left(\frac{\eta \sigma}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right] d\eta.$$

La cual se verifica sustituyendo $\hat{P}_{Sp}(r, z; \omega)$ en la ecuación diferencial inhomogénea (18) suponiendo que los operadores derivada e integral conmutan. Así, la solución general de la ecuación inhomogénea, para $0 < r < +\infty$ y $-\infty < \omega < +\infty$, es

$$\hat{P}_S(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) \left[A_S(\omega, \eta)e^{+iz\sqrt{k_s^2 - \eta^2}} + B_S(\omega, \eta)e^{-iz\sqrt{k_s^2 - \eta^2}} + \Delta(\eta, \omega)e^{-\mu z} \right] d\eta, \quad \text{en } 0 < z < L, \quad (19)$$

donde, nuevamente $A_S(\omega, \eta)$ y $B_S(\omega, \eta)$ son las constantes de integración. Además, se han definido las funciones

$$\Delta(\eta, \omega) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\hat{\Theta}(\omega)}{(k_s^2 - \eta^2) + \mu^2} \exp \left(- \frac{\sigma^2}{8} \eta^2 \right) \quad \text{y} \quad \hat{\Theta}(\omega) \equiv -i\omega \frac{P_0}{c_s^2} \hat{\theta}(\omega).$$

Obtención de los coeficientes $A_U(\eta, \omega)$ y $B_U(\eta, \omega)$, $U = B, S$ y, F

Para determinar los coeficientes de integración se debe considerar que, debido a que no hay fuentes en el fluido, entonces solo hay ondas que se alejan de los extremos de la muestra; por lo tanto, para $z < 0$, $\hat{P}_B(r, z; \omega)$ debe ser una onda que viaja hacia la izquierda, y para $z > L$, $\hat{P}_F(r, z; \omega)$ se propaga hacia la derecha. En consecuencia, $B_B(\eta, \omega)$ y $A_F(\eta, \omega)$ deben ser cero. Para los demás coeficientes de integración, a saber $A_B(\omega, \eta)$, $A_S(\omega, \eta)$, $B_S(\omega, \eta)$, y $B_F(\omega, \eta)$, aplicamos las condiciones de frontera [Ecs. (14)], y considerando nuevamente el operador derivada conmuta con el operador integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{\infty} [A_S(\eta, \omega) + B_S(\eta, \omega) + \Delta(\eta, \omega) - A_B(\eta, \omega)] \eta J_0(\eta r) d\eta, \\
 0 &= \int_0^{\infty} [A_S(\eta, \omega) e^{+iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} + B_S(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} + \Delta(\eta, \omega) e^{-\mu L} - B_F(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_f(\eta, \omega)}] \eta J_0(\eta r) d\eta, \\
 0 &= \int_0^{\infty} \{ [A_S(\eta, \omega) - B_S(\eta, \omega)] \mathcal{K}_s(\eta, \omega) + i\mu \Delta(\eta, \omega) - \rho A_B(\eta, \omega) \mathcal{K}_f(\eta, \omega) \} \eta J_0(\eta r) d\eta, \\
 0 &= \int_0^{\infty} \{ [A_S(\eta, \omega) e^{+iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} - B_S(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)}] \mathcal{K}_s(\eta, \omega) + i\mu \Delta(\eta, \omega) e^{-\mu L} + \rho B_F(\eta, \omega) \mathcal{K}_f(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_f(\eta, \omega)} \} \eta J_0(\eta r) d\eta,
 \end{aligned}$$

donde se definió $\rho \equiv \rho_s / \rho_f$, además se definieron los números de onda

$$\mathcal{K}_f(\omega, \eta) \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2}, \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_s(\omega, \eta) \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \eta^2}.$$

Las integrales son iguales a cero si los integrandos son iguales a cero, es decir, sí

$$\begin{aligned}
 0 &= A_S(\eta, \omega) + B_S(\eta, \omega) + \Delta(\eta, \omega) - A_B(\eta, \omega), \\
 0 &= [A_S(\eta, \omega) - B_S(\eta, \omega)] \mathcal{K}_s(\eta, \omega) + i\mu \Delta(\eta, \omega) - \rho A_B(\eta, \omega) \mathcal{K}_f(\eta, \omega), \\
 0 &= A_S(\eta, \omega) e^{+iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} + B_S(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} + \Delta(\eta, \omega) e^{-\mu L} - B_F(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_f(\eta, \omega)}, \\
 0 &= [A_S(\eta, \omega) e^{+iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)} - B_S(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_s(\eta, \omega)}] \mathcal{K}_s(\eta, \omega) + i\mu \Delta(\eta, \omega) e^{-\mu L} + \rho B_F(\eta, \omega) \mathcal{K}_f(\eta, \omega) e^{-iL\mathcal{K}_f(\eta, \omega)},
 \end{aligned}$$

que son cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, siendo éstas $A_B(\eta, \omega)$, $A_S(\eta, \omega)$, $B_S(\eta, \omega)$ y $B_F(\eta, \omega)$.

Después de NO poca algebra, se tiene

$$A_B(\eta, \omega) = \frac{1}{\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_f \rho} \frac{(\mathcal{K}_s + i\mu) [1 - e^{-(\mu + i\mathcal{K}_s)L}] - R(\mathcal{K}_s - i\mu) [1 - e^{+(i\mathcal{K}_s - \mu)L}]}{1 - R^2 e^{-2i\mathcal{K}_s L}} \Delta, \quad (20a)$$

$$B_B(\eta, \omega) = 0, \quad (20b)$$

$$A_S(\eta, \omega) = \frac{e^{-2i\mathcal{K}_s L} (\mathcal{K}_s + i\mu) [R^2 - e^{-(\mu - i\mathcal{K}_s)L}] - R(\mathcal{K}_s - i\mu) [1 - e^{+(i\mathcal{K}_s - \mu)L}]}{2\mathcal{K}_s} \Delta, \quad (20c)$$

$$B_S(\omega, \eta) = \frac{e^{-iL\mathcal{K}_s} (\mathcal{K}_s + i\mu) [1 - e^{-(\mu + i\mathcal{K}_s)L}] R - (\mathcal{K}_s - i\mu) [1 - R^2 e^{-(\mu + i\mathcal{K}_s)L}]}{2\mathcal{K}_s} \Delta, \quad (20d)$$

$$A_F(\eta, \omega) = 0, \quad (20e)$$

$$B_F(\eta, \omega) = \frac{e^{i(\mathcal{K}_f - \mathcal{K}_s)L} (\mathcal{K}_s + i\mu) [1 - e^{-(i\mathcal{K}_s + \mu)L}] R - (\mathcal{K}_s - i\mu) [1 - e^{+(i\mathcal{K}_s - \mu)L}]}{\mathcal{K}_s + \mathcal{K}_f \rho} \Delta. \quad (20f)$$

Donde, para no saturar al texto, no se escribió la dependencia (ω, η) en la mayoría de las funciones. Además, en analogía con el problema 1D [1], definimos

$$R(\omega, \eta) \equiv \frac{\mathcal{K}_s(\omega, \eta) - \rho \mathcal{K}_f(\omega, \eta)}{\mathcal{K}_s(\omega, \eta) + \rho \mathcal{K}_f(\omega, \eta)}. \quad (21)$$

Regiones de integración para $\hat{P}_B(\mathbf{r}, \mathbf{z}; \omega)$ y $P_F(\mathbf{r}, \mathbf{z}; \omega)$

Dado que en la mayoría de las aplicaciones del USIL, la detección de las ondas longitudinales de presión no se hace en la muestra, sino que se realizan en el fluido, sólo se analizarán las soluciones $\hat{P}_B(r, z; \omega)$ y $\hat{P}_F(r, z; \omega)$, las cuales están dadas por la Ecs. (17), tomando en cuenta las Ecs. (20) y (21). Considerando que, para cualquier muestra sólida o tejido suave, se cumple que $c_f \leq c_s$, luego

$$k_s = \frac{\omega}{c_s} \leq \frac{\omega}{c_f} = k_f$$

por lo que las Ecs. (17) se pueden escribir en la forma

$$\hat{P}_B(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\omega}{c_s}} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta + \int_{\frac{\omega}{c_s}}^{\frac{\omega}{c_f}} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta + \int_{\frac{\omega}{c_f}}^{\infty} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta \right],$$

$$\hat{P}_F(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\omega}{c_s}} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta + \int_{\frac{\omega}{c_s}}^{\frac{\omega}{c_f}} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta + \int_{\frac{\omega}{c_f}}^{\infty} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f(\omega, \eta)} \eta J_0(\eta r) d\eta \right].$$

Analicemos las integrales definidas por los intervalos de los números de onda. Para las integrales

$$\int_0^{\frac{\omega}{c_s}} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta \quad \text{y} \quad \int_0^{\frac{\omega}{c_s}} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta$$

se tiene

$$0 \leq \eta \leq \frac{\omega}{c_s} \leq \frac{\omega}{c_f} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \eta^2 \leq \frac{\omega^2}{c_s^2} \leq \frac{\omega^2}{c_f^2}, \quad \text{o} \quad \frac{\omega^2}{c_s^2} - \eta^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2 \geq 0$$

por lo que

$$\mathcal{K}_f = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2} \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{K}_s = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \eta^2} \in \mathbb{R}, \quad \text{y} \quad |R| = \left| \frac{\mathcal{K}_s - \rho\mathcal{K}_f}{\mathcal{K}_s + \rho\mathcal{K}_f} \right| < 1.$$

Mientras que para las integrales

$$\int_{\frac{\omega}{c_s}}^{\frac{\omega}{c_f}} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta \quad \text{y} \quad \int_{\frac{\omega}{c_s}}^{\frac{\omega}{c_f}} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta,$$

tenemos

$$0 \leq \frac{\omega}{c_s} < \eta < \frac{\omega}{c_f} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{\omega^2}{c_s^2} < \eta^2 < \frac{\omega^2}{c_f^2}, \quad \text{o} \quad \frac{\omega^2}{c_s^2} - \eta^2 \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2 \geq 0$$

por lo que

$$\mathcal{K}_f = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2} \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{K}_s = i \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}} = i\bar{\mathcal{K}}_s \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad |R| = \left| \frac{i\bar{\mathcal{K}}_s - \rho\mathcal{K}_f}{i\bar{\mathcal{K}}_s + \rho\mathcal{K}_f} \right| = 1.$$

Finalmente, para las integrales

$$\int_{\omega/c_f}^{\infty} A_B e^{+iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta \quad \text{y} \quad \int_{\omega/c_f}^{\infty} B_F e^{-iz\mathcal{K}_f} \eta J_0(\eta r) d\eta$$

tenemos

$$0 \leq \frac{\omega}{c_s} \leq \frac{\omega}{c_f} \leq \eta \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{\omega^2}{c_s^2} \leq \frac{\omega^2}{c_f^2} \leq \eta^2, \quad \text{o} \quad \frac{\omega^2}{c_s^2} - \eta^2 \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\omega^2}{c_f^2} - \eta^2 \leq 0$$

por lo que

$$\mathcal{K}_f = i \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c_f^2}} \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{K}_s = i \sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}} = i\bar{\mathcal{K}}_s \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad |R| = \left| \frac{i\bar{\mathcal{K}}_s - i\rho\bar{\mathcal{K}}_f}{i\bar{\mathcal{K}}_s + i\rho\bar{\mathcal{K}}_f} \right| < 1.$$

Note que cuando:

- $\mathcal{K}_s(\omega, \eta) \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{K}_f(\omega, \eta) \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{\pm i\mathcal{K}_s(\omega, \eta)z}$ y $e^{\pm i\mathcal{K}_f(\omega, \eta)z}$ son ondas viajeras planas;
- $\mathcal{K}_s(\omega, \eta) \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{K}_f(\omega, \eta) \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{\pm i\mathcal{K}_s(\omega, \eta)z} = e^{\mp \bar{\mathcal{K}}_s(\omega, \eta)z}$ son funciones reales monótonamente decrecientes o crecientes, respectivamente, lo que indicaría que o bien hay una fuente o un sumidero de ondas acústicas en la muestra. $e^{\pm i\mathcal{K}_f(\omega, \eta)z}$ son ondas viajeras planas;
- $\mathcal{K}_s(\omega, \eta) \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{K}_f(\omega, \eta) \in \mathbb{C}$, se tiene que $e^{\pm i\mathcal{K}_s(\omega, \eta)z} = e^{\mp \bar{\mathcal{K}}_s(\omega, \eta)z}$ y $e^{\pm i\mathcal{K}_f(\omega, \eta)z} = e^{\mp \bar{\mathcal{K}}_f(\omega, \eta)z}$ son funciones monótonamente decrecientes y crecientes, respectivamente, lo que ahora indicaría que o bien hay una fuente o un sumidero de ondas acústicas tanto en la muestra como en el fluido.

Debido a que en el moldeo 2D que estamos analizando, supusimos que la única fuente de ultrasonido es la energía óptica absorbida, entonces una vez que se haya generado el pulso acústico éste se propaga libremente como una onda plana viajera, por lo que las situaciones (b) y (c) no son físicamente compatibles con la hipótesis inicial, por lo que nuestro estudio se hará en el intervalo de η donde se cumpla la condición (a). Por lo que las presiones forward y backward en el fluido están dadas por las integrales:

$$\hat{P}_B(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\omega}{c_s}} A_B(\omega, \eta) e^{+iz\mathcal{K}_f(\omega, \eta)} \eta J_0(\eta r) d\eta, \quad \text{y} \quad \hat{P}_F(r, z; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\omega}{c_s}} B_F(\omega, \eta) e^{-iz\mathcal{K}_f(\omega, \eta)} \eta J_0(\eta r) d\eta, \quad (23)$$

Metodología

Cálculo numérico de $d\hat{P}_B(r, z; \omega, \eta)$ y $d\hat{P}_F(r, z; \omega, \eta)$

Con el objetivo de analizar la respuesta de las presiones de USIL se implementó un algoritmo numérico en la plataforma de Wolfram Mathematica para estudiar los comportamientos de los cambios de las presiones, es decir, de $d\hat{P}_B(r, z; \omega)$ y $d\hat{P}_F(r, z; \omega)$. Se simuló una placa de aluminio de 6.32 mm de espesor, sumergida en agua. Los valores típicos de las magnitudes físicas del aluminio (muestra, s) y del agua (fluido, f), son velocidad ultrasónica $c_s = 6.32 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ y $c_f = 1.498 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; densidad de masa $\rho_s = 2.7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\rho_f = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; coeficiente de absorción óptica $\mu = 1.4399 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$; capacidad calorífica específica a presión constante $C_p = 9 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; y coeficiente de expansión térmica volumétrica $\beta = 6.9 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. El desacople característico de las impedancias acústicas específicas entre la muestra plan de aluminio y el agua circundante fue significativo ($Z_s = 1.706 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $Z_f = 1.498 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$).

Dispositivo experimental

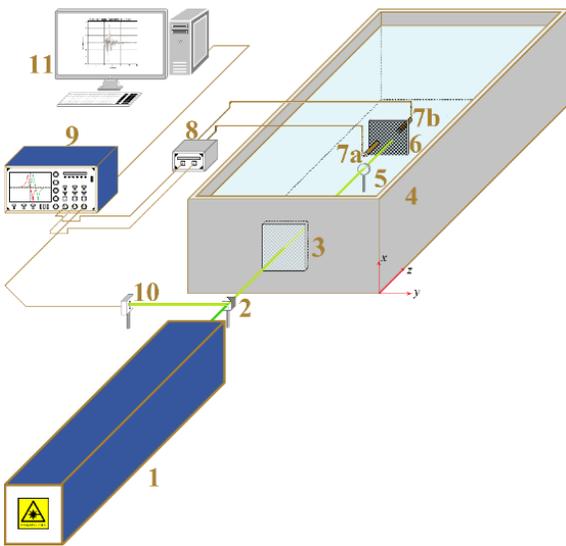


Figura 3. Representación esquemática del dispositivo experimental.

En la Fig. 3, se muestra una representación del dispositivo experimental utilizado. Para la generación del USIL se usó un láser de Nd: YAG, acoplado a un oscilador paramétrico óptico sintonizado a 532 nm. Un pulso láser (1) es dirigido hacia un divisor de haz 50/50 (2). Parte de la radiación se envía hacia una ventana transparente (3) de un recipiente lleno de agua (4), lugar donde se generarán y detectarán las ondas de USIL. El pulso llega a una lente (5) que expandirá o enfocará al pulso laser sobre la muestra. La fluencia láser por pulso se fijó en $30 \text{ mJ} \cdot \text{cm}^{-2}$ y, para los experimentos realizado en este verano, el diámetro del punto del haz fue de 4 mm. Con la finalidad de detectar las ondas longitudinales del USIL el haz **debe** incidir normal a la superficie de la muestra. Inmediatamente después de que el haz láser incide sobre la muestra plana (6), se generan las ondas de USIL, las cuales podrán ser detectadas por dos sensores de ultrasonido en el modo backward (7a) o en el forward (7b). El ángulo de inclinación del sensor (7a), en el modo de detección backward, fue menor a 2° . Las ondas longitudinales del USIL se detectaron únicamente en el modo backward.

La señal eléctrica transducida por los sensores fue enviada a un amplificador (8) y de ahí al osciloscopio digital (9) de 200 MHz y frecuencia de muestreo de 1 GSPS, el cual es disparado por un fotodiodo (10) con una señal de disparo con fluctuaciones de pulso óptico de 0.5 ns. Las señales se promediaron 32 veces para reducir el ruido aleatorio o no correlacionado. Las señales digitalizadas en el osciloscopio se envían a una PC (11) para su análisis. La primera medición se hizo cuando el haz láser incidió en el centro de la muestra. Se hicieron tres mediciones más moviendo lateralmente al sensor (7a) a pasos de $6.32 \times 10^{-4} \text{ m}$. En la PC, a las señales eléctricas del USIL, promediadas en el dominio del tiempo, se les realizó una transformada rápida de Fourier (FFT). Finalmente, se aplicó el método de relleno de ceros para obtener un incremento de resolución en el espectro de potencia de Fourier de hasta 50 MHz. Es importante destacar que las características combinadas de la muestra y los pulsos láser cumplieron con la definición de pulso largo ($\mu\text{s}, \tau_p = 7 \times 10^3 \gg 1$).

Las dimensiones (largo×ancho×altura) de la placa de aluminio, con pureza al 99.999 %, fueron $50 \text{ mm} \times 6.32 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$, la cual se mecanizó a partir de una pieza de aluminio de mayores dimensiones. El espesor de la muestra se midió utilizando un calibrador Vernier con una resolución de $1 \text{ mil} = 25.4 \mu\text{m}$.

Resultados y discusión

En la Fig. 4, se muestra la amplitud de los cambios diferenciales de las ondas longitudinales de USIL, u ondas fotoacústicas, en el modo Forward, $d\hat{P}_F(r, z; \omega, \eta)$, en función de la frecuencia $f = \omega/2\pi$ y de la variable de integración de las soluciones, η , para cinco valores del ancho espacial del pulso láser, a saber, $\sigma = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$, $\sigma = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\sigma = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\sigma = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$ y $\sigma = 1 \times 10^{-1} \text{ m}$. Como se puede ver, el ancho de banda del integrando es fuertemente dependiente del ancho espacial del pulso láser, pasando de 5 MHz para $\sigma = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$ a 100 MHz para $\sigma = 1 \times 10^{-1} \text{ m}$. Por otro lado, el ancho de banda en la variable η se va reduciendo conforme se incrementa el ancho espacial del pulso láser, Pasando de 4,000 1/m para $\sigma = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$ a 50 1/m para $\sigma = 1 \times 10^{-1} \text{ m}$. Para explicar el comportamiento anterior, recordemos que resolvimos la ecuación de onda trabajando en el espacio de Bessel-Fourier, lo que implica que tanto $d\hat{P}_B(r, z; \omega, \eta)$ como $d\hat{P}_F(r, z; \omega, \eta)$ son una expansión lineal de ondas planas ($e^{\pm i\omega t}$) y de las funciones de Bessel de primera especie de orden cero, $[J_0(\eta r)]$. Es un hecho [1] que el ancho del perfil temporal del pulso láser es un filtro pasa-banda en el espacio de Fourier, es decir que el ancho de banda frecuencial del espectro de las ondas longitudinales del USIL, u ondas fotoacústicas, esta determinado por el del pulso láser. Es de esperarse que el ancho de banda del espectro de las ondas fotoacústicas en el espacio de Bessel este determinado por el ancho del perfil espacial del pulso láser. Por otro lado, el espectro de $d\hat{P}_B(r, z; \omega, \eta)$ y $d\hat{P}_F(r, z; \omega, \eta)$, esta relacionado por $\mathcal{K}_f = \sqrt{\omega^2/c_f^2 - \eta^2}$, luego cuando uno crece el debe decrecer.

(a)

(b)

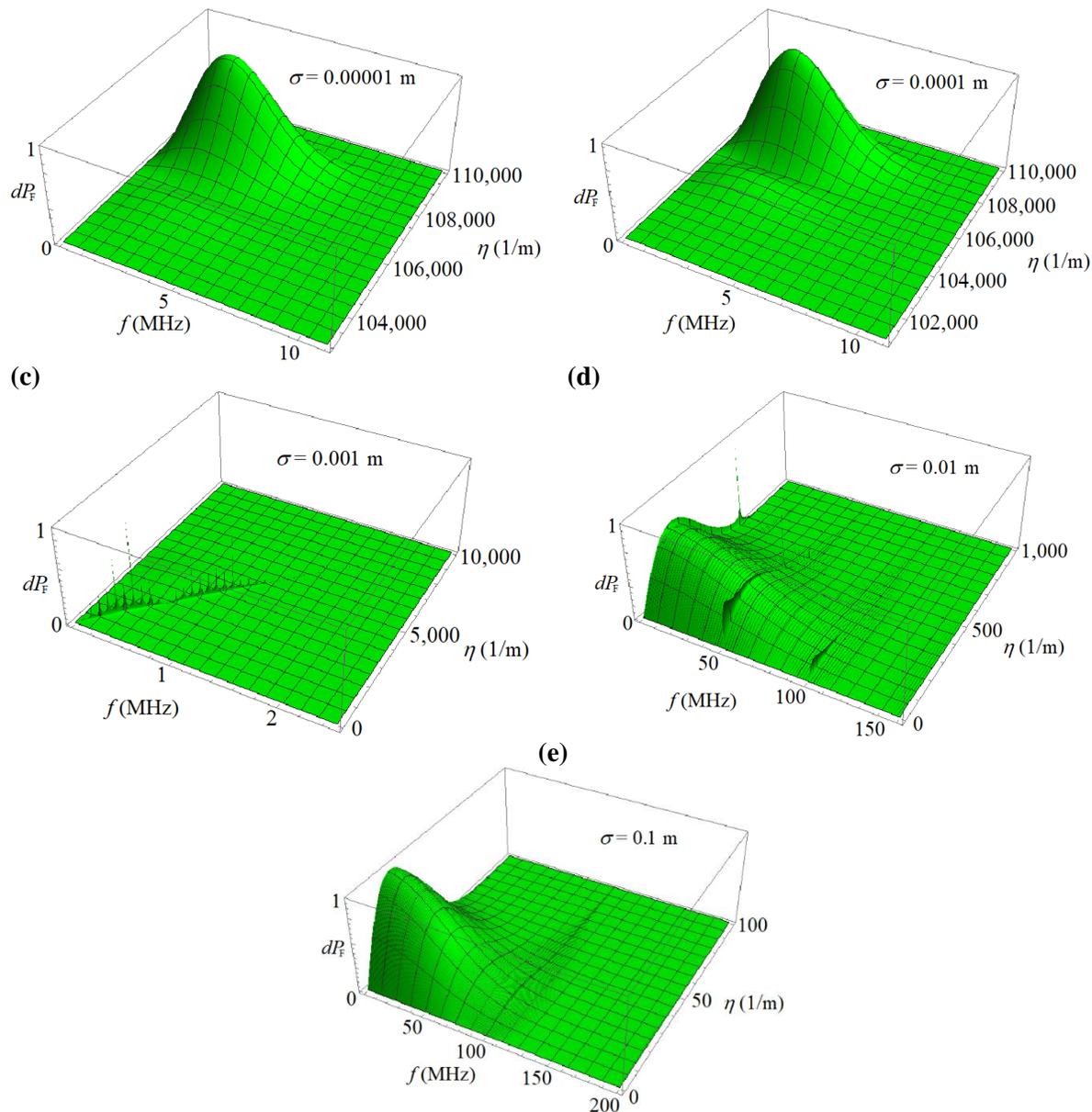


Figura 4. Amplitud de los cambios diferenciales de las ondas longitudinales de USIL en el modo Forward, $d\hat{P}_F(r, z; \omega, \eta)$, en función de la frecuencia $f = \omega/2\pi$ y de la variable de integración de las soluciones, η , para cinco valores del ancho espacial del pulso láser, a saber, $\sigma = 1 \times 10^{-5}$ m, $\sigma = 1 \times 10^{-4}$ m, $\sigma = 1 \times 10^{-3}$ m, $\sigma = 1 \times 10^{-2}$ m y $\sigma = 1 \times 10^{-1}$ m.

En la Fig. 5., se muestra la amplitud de las ondas longitudinales de USIL en el modo Forward, $\hat{P}_F(r, z; t)$, para, $r = 0$ m y $z = L$, (a) en función del tiempo y (b) en función de $f = \omega/2\pi$. Como se pueden ver debido al desacople de las impedancias acústicas, tanto en el espectro temporal como en el frecuencial, se observan las múltiples reflexiones internas. Tanto en el espectro como en el espectro frecuencial temporal estas reflexiones: En el tiempo, se observan por los picos secundarios (tres después del primero), mientras que en espacio de Fourier éstas se observan en la estructura de múltiples picos. En el espacio de frecuencias, se observa que el ancho de banda de la amplitud fotoacústica tiene un ancho de banda es del orden de los 20 MHz, mientras que ancho de banda pulso láser que utilizamos a $1/e$ es de 100 MHz (ver apéndice A). En trabajos anteriores esta discrepancia en el ancho de banda, se le atribuye al ancho de banda del sensor. Sin embargo, el sensor que utilizamos tiene un ancho de banda de 50 MHz, por lo que atribuimos a que el ancho

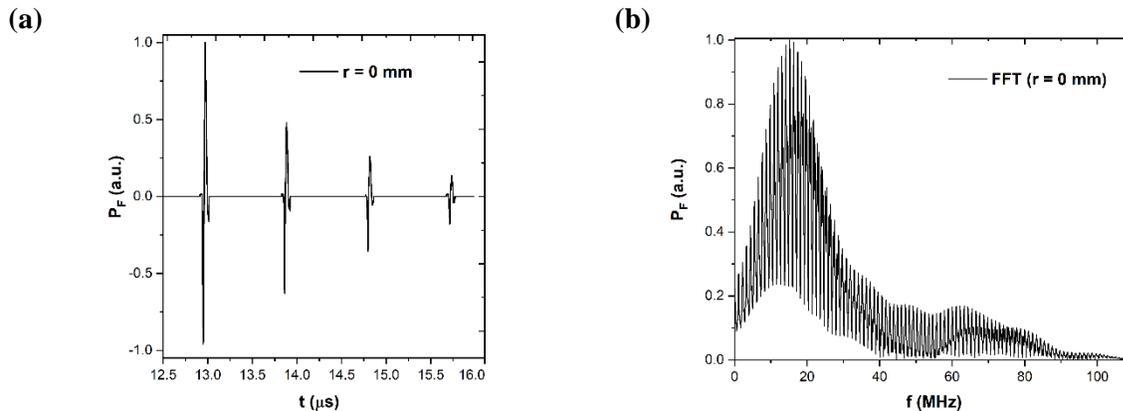


Figura 5. Amplitud de las ondas longitudinales de USIL en el modo Forward, $\hat{P}_F(r, z; t)$, para $r = 0$ m y $z = L$, (a) en función del tiempo y (b) en función de $f = \omega/2\pi$.

espacial del pulso láser afecta el ancho de banda del espectro en frecuencias de la amplitud fotoacústica. Este es un trabajo que no se pudo concluir en esta estancia de verano, pero que se está desarrollando con el objetivo de:

1. Estudiar el efecto del ancho espacial en la amplitud del USIL el cual, si podemos variar experimentalmente en el laboratorio, no así el ancho temporal.
2. Correlacionar el ancho temporal y espacial del pulso láser con el ancho de banda de la amplitud del USIL.
3. Estudiar el comportamiento de las señales de USIL en función de la distancia radial.
4. Verificar si las soluciones 2D convergen a las soluciones de las ecuaciones acopladas (1) y (2) para una partícula puntual iluminada con un pulso láser con perfil Gaussiano [8]. Este estudio lo inicio Diego Macias Gutiérrez en este verano estudiando la referencia [8] y diseñando un experimento que se genere una partícula puntual. Ver video producto de este verano.
5. Verificar si las soluciones 2D convergen a las soluciones de las ecuaciones acopladas (1) y (2) para una geometría 1D con iluminación con un pulso láser con perfil Gaussiano. Este estudio lo inicio Bruno Escobedo Adang en este verano estudiando la referencia [1]. Ver video producto de este verano.
6. Estudiar el efecto que tienen las ondas transversales y superficiales en el espectro de la señal fotoacústica. Recordemos que un pulso láser puede generar diferentes tipos de ondas de USIL, a saber, longitudinales, transversales, superficiales de Rayleigh, superficiales Love y superficiales Lamb (ver Fig. 6). Esta investigación la inició Jorge Zanoni Ruíz Frausto, estudiando los artículos [9] y [10]. Ver video producto de este verano.

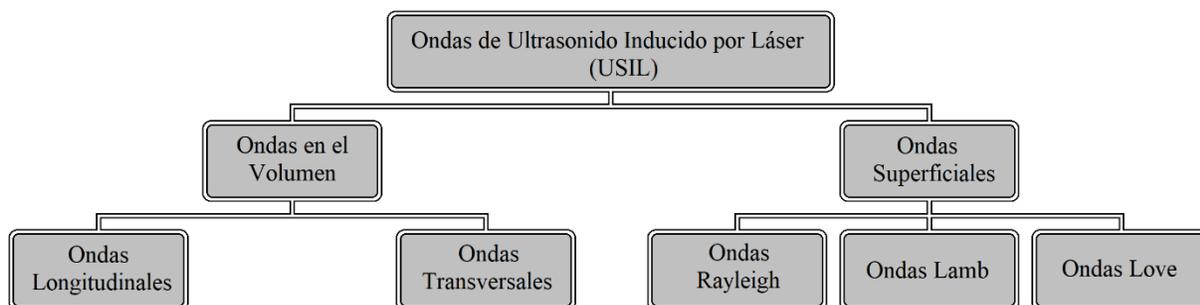


Fig. 6. Diferentes tipos de ondas inducidas por láseres pulsados.

Apéndice A

Sea

$$\theta(t) = \frac{\exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right] dt} \quad (A1)$$

debido a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) \frac{\tau_p}{2} du = \frac{\tau_p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\tau_p}{2} \sqrt{\pi}$$

entonces

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\tau_p} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right]$$

Estamos buscando los valores de t para los que,

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\tau_p} \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right] = \frac{1}{e} \frac{2}{\sqrt{\pi}\tau_p} \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2\right] = \frac{1}{e}$$

así

$$-\left(\frac{2t}{\tau_p}\right)^2 = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2t}{\tau_p} = \pm 1$$

o

$$t = \pm \frac{\tau_p}{2} = \begin{cases} t_1 = -\frac{\tau_p}{2} \\ \dots \\ t_2 = +\frac{\tau_p}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \tau_p.$$

entonces decimos que la Ec. (A1) es un pulso Gaussiano con una duración τ_p cuando la amplitud ha decrecido a $1/e$. En nuestros experimentos, los láseres con los que trabajamos tienen un tiempo de pulso láser de $\Delta t = \tau_p = 10 \text{ ns} = 10^{-8} \text{ s}$

Ahora, buscamos los valores ω para los que,

$$\hat{\theta}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\pi f \tau_p}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-\left(\frac{\pi f \tau_p}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{e},$$

así

$$-\left(\frac{\pi \tau_p}{2} f\right)^2 = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi \tau_p}{2} f = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

de donde,

$$f = \pm \frac{2}{\pi \tau_p} = \begin{cases} f_1 = -\frac{2}{\pi \tau_p}, \\ \dots \\ f_2 = +\frac{2}{\pi \tau_p}, \end{cases} \quad \text{o} \quad \Delta f_{\frac{1}{e}} = f_2 - f_1 = \frac{4}{\pi \tau_p} = \frac{4}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz} \approx 127.3 \text{ MHz}.$$

Aplicación del criterio FWHM (Ancho completo a la mitad del máximo)

$$\hat{\theta}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\pi f \tau_p}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-\left(\frac{\pi f \tau_p}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2},$$

así

$$-\left(\frac{\pi\tau_p}{2}f\right)^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi\tau_p}{2}f = \pm\sqrt{\ln(2)}$$

de donde,

$$f = \pm \frac{2\sqrt{\ln(2)}}{\pi\tau_p} = \begin{cases} f_1 = -\frac{2\sqrt{\ln(2)}}{\pi\tau_p} \\ f_2 = +\frac{2\sqrt{\ln(2)}}{\pi\tau_p} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \Delta f_{\frac{1}{2}} &= \frac{4}{\pi\tau_p}\sqrt{\ln(2)} = \frac{4}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz} \approx 106.0 \text{ MHz} \\ &= \sqrt{\ln(2)} \Delta f_{\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

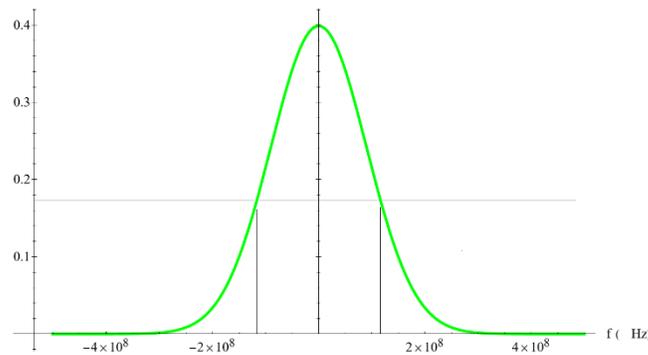


Figura 1A. Definición del ancho de banda.

Bibliografía/Referencias

- [1] M. Ruiz-Veloz, G. Martínez-Ponce, R. I. Fernández-Ayala, R. Castro-Beltrán, L. Polo-Parada, B. Reyes-Ramírez, and G. Gutiérrez-Juárez, *J. Appl. Phys.* **130**, 025104 (2021), URL <https://doi.org/10.1063/5.0050895>.
- [2] R. J. Dewhurst, T. Li, and G. Gondek, "Amplitude decay of photoacoustic signals in biological tissue when irradiated by nanosecond laser pulses," *Proc. SPIE* **6437**, 643723 (2007). <https://doi.org/10.1117/12.698887>
- [3] G. Gondek, T. Li, R. Lynch, and R. J. Dewhurst, "Decay of photoacoustic signals from biological tissue irradiated by near infrared laser pulses," *J. Biomed. Opt.* **11**, 11-11-4 (2006). <https://doi.org/10.1117/1.2360690>
- [4] Sungho Choi and Kyung-Young Jhang. Internal defect detection using laser-generated longitudinal waves in ablation regime. *Journal of Mechanical Science and Technology.* **32**(9) (2018) pp4191-4200. <https://doi.org/10.1007/s12206-018-0817-1>
- [5] C. A. Bravo-Miranda, A. González-Vega, and G. Gutiérrez-Juárez, "Influence the size, geometry and temporal response of the finite piezoelectric sensor on the photoacoustic signal: The case of the point-like source," *Appl. Phys. B.* **115**, pp. 471-482 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5627-7>
- [6] L. V. Wang and H.-I. Wu, *Biomedical Optics: Principles and Imaging* (Wiley-Interscience, 2007).
- [7] W. B. Jackson, N. M. Amer, A. C. Boccara, and D. Fournier. Photothermal deflection spectroscopy and detection. *Appl. Opt.* **20**(8), pp. 1333-1344 (1981). <https://doi.org/10.1364/AO.20.001333>
- [8] I. G. Calasso, W. Craig, and G. J. Diebold. Photoacoustic Point Source. *Phys. Rev. Lett.* **86**(16), pp. 3550-3553. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3550>
- [9] C. B. Scruby, L. E. Drain, *Laser Ultrasonics Techniques and Applications*, Ed. Taylor & Francis Group, (1990).
- [10] Scruby, C. B., Jones, K. R., & Antoniazzi, L. (1986). Diffraction of elastic waves by defects in plates: Calculated arrival strengths for point force and thermoelastic sources of ultrasound. *Journal of Nondestructive Evaluation*