

## Errores en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior

Oliver Antonio Juárez Romero<sup>1</sup>, Paulina Muñoz Villa<sup>2</sup>, Rafael Romero Toledo<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de ingeniería en Minas, Metalurgia y Geología. Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato.

<sup>2</sup>Licenciatura en Ingeniería Biomédica.

<sup>3</sup>Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato.

oa.juarez@ugto.mx<sup>1</sup>

### Resumen

En este artículo de revisión se presenta el análisis del error en la educación matemática en el nivel superior. Los principales hallazgos demuestran que los errores que cometen los estudiantes, al tomar cursos de área básica, no son solo el resultado del desconocimiento de los procedimientos vistos en clase. En muchas ocasiones los errores son el producto de una transferencia negativa de aprendizaje basada en un contenido matemático desarrollado con anterioridad o vinculado con el nuevo contenido por aprender. En este sentido, los errores pueden considerarse como parte de una fase inicial del proceso de aprendizaje y como tal deben de asumirse por el docente. Finalmente, se presentan tipologías sobre la clasificación de los errores.

**Palabras clave:** errores; tipología.

### Introducción

Dentro del desarrollo de una clase de matemáticas es común que los estudiantes cometan errores. La importancia del análisis de los errores radica en el hecho de que son un insumo que le permite al docente reorientar la clase en términos de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Además, favorecen la identificación de conceptos, procedimientos o algoritmos que el estudiante aún no comprende del todo.

El estudio de los errores no es nuevo. De acuerdo con Radatz (1979):

El análisis del error en la educación matemática tiene una larga historia tanto en Estados Unidos y Alemania. Los métodos e hipótesis de investigación del caso Americano sobre los errores tienen una larga orientación sobre el conductismo, mientras que en Europa los aspectos de la teoría de la Gestalt y las ideas de los reformadores pedagógicos tuvieron gran influencia. (Página 163).

En este punto queremos destacar el hecho de que la Investigación sobre los errores en matemáticas se desarrolla en su mayoría en términos de realizar una tipología y que son escasos los estudios en donde se analizan las posibles causas de estos.

En este sentido con el desarrollo de este artículo se inicia un proyecto cuyo fin último es identificar los errores cometidos por los estudiantes del nivel superior del Departamento de Ingenierías en Minas, Metalurgia y Geología específicamente, en la UDA de Probabilidad y Estadística que imparte uno de los autores, con el fin de identificar las causas y proporcionar recomendaciones sobre acciones correctivas a los docentes de las UDAs previas. Como punto de partida para el proyecto se consideran los siguientes artículos como fundamentales Radatz (1979, 1980), Movshovitz-Hadar et. al (1989) y Colina y Romero (2020). Este último presenta una tipología de errores para estudiantes de ingeniería.

El artículo está dividido en tres secciones. La primera sección se define el concepto de error en la educación matemática. En la segunda sección se presentan las principales líneas de investigación sobre el error destacando aquellos trabajos en donde se analiza este concepto en el nivel superior. Finalmente, se presentan los principales hallazgos de la revisión de la literatura, además se realizan algunas recomendaciones.

## El error en la educación matemática

La matemática puede ser considerada en términos generales, como la ciencia del número y que tiene por objetivo establecer patrones o relaciones. Por otro lado, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos complejos en el que interfieren múltiples factores como lo son el curriculum, el docente, el ambiente de aprendizaje, los aprendizajes previos, etc. Por lo cual, de acuerdo con Radatz (1979):

Una separación nítida de las posibles causas de un error suele ser bastante difícil porque existe una interacción muy estrecha entre las causas. Por otro lado, hay varios factores relacionados con el aprendizaje matemático, por lo que el error será de diferentes tipos según estos factores. (Página 164).

Siguiendo la propuesta de Ray (2016), los errores se clasifican en dos tipos: deslices y errores de procedimientos. Estos últimos son los que más se han estudiado en la literatura. De acuerdo Ginsburg citado por Ray (2016):

Los "deslices" son los errores que se producen por lapsus de memoria o por impulsividad del alumno. Por lo general, este tipo de error no se refiere a los errores debido a la incomprensión del alumno. Ocurre cuando el estudiante no sigue un método particular. Los déficits de memoria, impulsividad, problemas de integración visual o motora también pueden ser responsable de este tipo de error. Por lo tanto, puede tener lugar aunque el estudiante sepa bien el procedimiento. Estos a menudo se denominan errores por descuido y generalmente se incluyen en errores de cálculo o de signo (realizando la operación incorrecta). Los investigadores explican que estos errores también pueden ser considerados como errores en la implementación de la estrategia. (Página 156).

Los errores de procedimientos pueden nombrarse como errores de patrón. Radatz (1979) analiza estos errores en el aprendizaje del álgebra. De acuerdo con Ray (2016),

Estos errores son considerados como el problema más grave porque indica la falta de comprensión o la comprensión incompleta del estudiante. Cuando un estudiante usa un procedimiento o estrategia inexacta o ineficiente repetidamente se considera un error de procedimiento. Por lo general, la aplicación incorrecta de una regla o estrategia también es un ejemplo de este tipo de error. (Página 157).

En la tabla 1 se puede apreciar la tipología propuesta por Radatz (1979).

**Tabla 1.** Errores de procedimiento

Tipo	Características básicas
Dificultad del Lenguaje	Manejo inadecuado de la notación y los símbolos.
Dificultad con la información espacial.	Incomprensión de representaciones espaciales.
Dominio deficiente de las habilidades, los hechos y los conceptos necesarios.	No se logra captar el principio esencial del problema.
Asociaciones incorrectas y rigidez de pensamiento	El alumno trata de adivinar las respuestas o no logra manipular los procedimientos.
Aplicación incorrecta de reglas y estrategias	El estudiante no tiene conocimiento sobre cuál regla o estrategia aplicar.

A continuación, ampliamos esta tipología de errores tomada de la descripción dada por Radatz (1979).

### **Errores debido a la dificultad del lenguaje**

Las matemáticas son como un "idioma extranjero" para muchos estudiantes. En el aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes necesitan comprender conceptos matemáticos; tienen que aprender algunos símbolos básicos; y necesitan ser enriquecidos con un poco de vocabulario. Al inicio de cualquier estudio de las matemáticas es necesario que los alumnos conozcan bien el idioma en el que se describen las situaciones abordadas en la materia. Si el estudiante no tiene suficiente conocimiento sobre el lenguaje para entender la descripción de problemas y ejercicios puede cometer errores y que se incluirán en este tipo.

### **Errores debido a la dificultad con la información espacial**

Los errores causados por dificultades en la obtención de información espacial se denominan errores espaciales. Cuando los problemas se representan mediante el uso de iconos, formas, signos o símbolos visuales, se requiere que los estudiantes tengan nociones vinculadas al espacio. Por ejemplo, los estudiantes pueden cometer errores en el contexto de los diagramas Venn-Euler debido a las dificultades para comprender que las líneas representan límites.

### **Errores debido al dominio deficiente de las habilidades, los hechos y los conceptos necesarios**

En este grupo se encuentran los errores estructurales. Estos errores surgen de la falta de comprensión de las relaciones involucradas en los diferentes componentes de un problema. Aquí el estudiante no logra captar el principio esencial del problema. Cuando un alumno no utiliza su visualización matemática para comprobar en el proceso de resolución de problemas, este tipo de error puede ocurrir.

### **Errores debido a las asociaciones incorrectas y rigidez de pensamiento**

En este grupo se encuentran los errores arbitrarios y ejecutivos. Los errores arbitrarios tienen lugar cuando el alumno se comporta de manera arbitraria y no sigue las instrucciones adecuadas. Estos errores se caracterizan por la falla del alumno a adherirse al problema. A menudo resultan en adivinar o dar una respuesta sin proporcionar una justificación. El error ejecutivo se refiere al error en el que el estudiante no logra manipular los principios matemáticos. En estos casos, el alumno conoce los principios, pero no logra comprender cómo los usa en la situación dada.

Pippig citado por Radatz (1979) realiza una interesante clasificación de este tipo de error

- a) Errores de preservación, en el cual los elementos únicos de una tarea o de un problema predominan.
- b) Errores de asociación, que involucran interacciones incorrectas entre elementos.
- c) Errores de interferencia, en los que distintas operaciones o conceptos interfieren entre sí.
- d) Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta provoca errores al leer o escribir, etc. Tales errores a menudo se clasifican como errores que son el resultado de la falta de atención y concentración.
- e) Errores de transferencia negativa en los que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

### **Errores debido a la aplicación incorrecta de reglas y estrategias**

Cuando los estudiantes no aplican correctamente las reglas y estrategias matemáticas, se le llama error de procedimiento. Las soluciones apresuradas y la actitud de descuido del estudiante dan como resultado este tipo de errores. Este tipo de errores pueden tener lugar cuando el estudiante no tiene claro qué regla se aplicará para resolver determinado problema. Por otro lado, pueden ocurrir cuando el conocimiento del alumno es inadecuado para aplicar las reglas apropiadamente.

De acuerdo con Radatz (1979) esta tipología nos sugiere los siguientes puntos de vista:

- a) Los errores en el aprendizaje de las matemáticas no son simplemente la ausencia de respuestas correctas o el resultado de accidentes desafortunados. Son la consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta.

- b) Es plausible analizar la naturaleza y las causas subyacentes de los errores en términos de mecanismos de procesamiento de la información del individuo.
- c) El análisis de errores ofrece una variedad de puntos de partida para la investigación de los procesos que los estudiantes utilizan al aprender matemáticas.
- d) La consideración de los aspectos diagnósticos y causales de los errores podría brindar una ayuda específica a los profesores de matemáticas al permitirles integrar su conocimiento al contenido del plan de estudios.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnos de Secundaria en matemáticas, Movshovitz-Hadar et. al (1989) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

#### **Datos mal utilizados**

Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

#### **Interpretación incorrecta del lenguaje**

Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

#### **Inferencias no válidas lógicamente**

Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

#### **Teoremas o definiciones deformados**

Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.

#### **Falta de verificación en la solución**

Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.

#### **Errores técnicos**

Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos. La categorización de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y

las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos, parece claro que la interpretación en base al procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

## Líneas de Investigación

La investigación de los errores en educación matemática tiene una larga tradición. En Radatz (1980), se presenta un estudio de las contribuciones más significativas al análisis de los errores hasta finales de los años setenta del pasado siglo, agrupando a los autores por países y destacando los estudios en Alemania, Unión Soviética y Estados Unidos. En este último país destaca la aportación Brueckner (1935), citada en Radatz, que junto con otros investigadores orientaron los trabajos sobre cinco objetivos:

1. Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.
2. Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
3. Analizar las dificultades especiales.
4. Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.
5. Tratar de clasificar y agrupar los errores.

Por otro lado, de acuerdo con Socas (2007) existe una línea de investigación en el estudio de los errores en educación Matemática en donde se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto (sociocultura, institucional) y de sus interacciones, lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos, como señalaba Radatz (1979).

Además, Socas (2007) expresa que de esta línea de trabajo sobre el análisis, clasificación y causas de los errores, se tiene que: en primer lugar, algunas investigaciones ponen de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; en segundo lugar, las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente, no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático a los mismos.

En un esfuerzo por contribuir al problema planteado por Radatz (1979) y Socas (2007), los autores Colina y Romero (2020) proponen una tipología de los errores en el nivel universitario con sus respectivos indicadores.

Categorías	Siglas
1. Errores debido a los conocimientos previos	ECP
2. Errores debido al lenguaje matemático	ELM
3. Errores debido al razonamiento	ER
4. Errores debido al procedimiento	EP
5. Errores debido a la tecnología	ETC
6. Errores debido a la transferencia	ETR
7. Errores de representaciones gráficos	ERG
8. Errores debido al azar	EAZ

Figura 1. Tipología de errores para el nivel universitario propuesta por Colina y Romero (2020).

Los indicadores debidos a los conocimientos previos se pueden apreciar en la Figura 2.

Categorías	Indicadores
Errores debido a los conocimientos previos (ECP)	CP1: Ejecuta mal operaciones aritméticas.
	CP2: Reduce mal términos semejantes.
	CP3: Realiza factorizaciones defectuosas o no las realiza.
	CP4: Aplica mal propiedades de las potencias.
	CP5: Aplica mal propiedades de las raíces.
	CP6: Aplica mal propiedades de los logaritmos.
	CP7: Aplica mal propiedades de las funciones trigonométricas.
	CP8: Aplica mal identidades trigonométricas.
	CP9: Propone valores incorrectos para evaluar las funciones trigonométricas en los ángulos notables.
	CP10: Cancela factores distintos en una fracción.
	CP11: Desarrolla de manera inadecuada los productos notables.
	CP12: Realiza defectuosamente la completación de cuadrados
	CP13: Desconoce los valores de las funciones para los ángulos notables.

Figura 2. Tipología para errores y sus indicadores tomados de Colina y Romero (2020)

## Conclusiones

Dentro de las principales conclusiones están las siguientes:

1. La mayoría de los estudios sobre los errores en matemáticas se basan en la construcción de una tipología y son escasos los trabajos que se centran en identificar las causas de tales errores.
2. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas no son simplemente la ausencia de respuestas correctas o el resultado de accidentes desafortunados. Son la consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta.
3. Es plausible analizar la naturaleza y las causas subyacentes de los errores en términos de mecanismos de procesamiento de la información del individuo.
4. El análisis de errores ofrece una variedad de puntos de partida para la investigación de los procesos que los estudiantes utilizan al aprender matemáticas.
5. La consideración de los aspectos diagnósticos y causales de los errores podría brindar una ayuda específica a los profesores de matemáticas al permitirles integrar su conocimiento al contenido del plan de estudios. En este sentido es importante validar trabajos como De la Torre (2004) o Rushton (2018).
6. La determinación y validación de Indicadores para una tipología de errores es de suma importancia.
7. Las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores.

## Referencias

- Brueckner, J. (1935). Diagnosis in Arithmetic In: 34th SSE Yearbook., Bloomington, 269 – 302.
- Colina, P., y Romero, Y. (2020). Una tipología general de errores matemáticos para los estudiantes de ingeniería. *Encuentro Educativo*, 27(2), 201-219. <https://produccioncientificaluz.org/index.php/encuentro/article/view/36374>
- De la Torre, S. (2004). Aprender de los errores: el tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras.
- Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. vol. 18, págg. 3-14.

- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in mathematics Education*, 10(3), 163-172. <https://doi.org/10.2307/748804>.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Ray, M. (2016). Exploring human error.
- Rushton, S. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal* 3 (4), 1-12.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En *Investigación en educación matemática XI*. pp. 19-52.