

MODELADO DE GRANDES DEFORMACIONES EN VIGAS Y CORAZAS

Delgado Barrera, Maria Angélica; Hernández Pérez, Adrián

¹[Ingeniería Mecatrónica, División de Ingenierías, Universidad Autónoma de Bucaramanga | Dirección de correo electrónico: mdelgado685@unab.edu.co]

²[Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingeniería, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: adrian.hernandez@ugto.mx]

Resumen

Este artículo expone una solución aproximada al análisis de pequeñas y grandes deformaciones en vigas y corazas, en la cual se abarquen todos los desplazamientos de la viga por cargas o momentos ejercidos; así como también se hace una comparación entre la solución no lineal encontrada y la solución clásica de resistencia de materiales.

Abstract

This article exposes an approximate solution to the analysis of small and large deformations in beams and armor, in which all the displacements of the beam are covered by loads or moments exercised; as well as a comparison between the non-linear solution found and the classical solution of material resistance.

Palabras clave

Deflexión, Deformación, Mecánica no lineal

INTRODUCCIÓN

El análisis de la deflexión influye en las situaciones de diseño en muchas formas. A menudo, el tamaño de una pieza se determina de acuerdo con las deflexiones, en vez de calcularse con base a los límites de esfuerzo y algunas veces, los elementos mecánicos se diseñan para que tengan una característica particular de la relación fuerza-deflexión.

Aunque el estudio de los fenómenos asociados a la deformación requiere modelos matemáticos diferentes que la Estática del Sólido Rígido, ésta será aún de utilidad, ya que la imposición de las condiciones de equilibrio se realiza mediante las mismas ecuaciones (1.2) de “suma de fuerzas igual a cero, y suma de momentos igual a cero”.

El estudio del sólido real (deformable) se divide tradicionalmente en varias disciplinas, que están fuertemente interconectadas entre sí, pero que al mismo tiempo tienen sus particularidades en cuanto al ámbito de aplicación, objeto de estudio, y modelos matemáticos o aproximaciones que utilizan. A continuación, se enumeran estas disciplinas:

- *Teoría de la Elasticidad:*

No presupone ninguna particularidad en la geometría del sólido que pudiera conducir a simplificaciones aproximadas del modelo. Sus resultados son por tanto de aplicación a sólidos de cualquier geometría. Habitualmente, en especial al abordar un primer estudio, suelen asumirse un conjunto de hipótesis que por una parte simplifican el modelo, y por otra parte se adaptan bien al comportamiento del acero y de otras aleaciones metálicas. En concreto supondremos material homogéneo (las propiedades son iguales en distintos puntos) e isótropo (en cualquier punto dado las propiedades no dependen de la dirección de observación), comportamiento elástico (el sólido recupera su forma inicial tras la descarga) y lineal (existe proporcionalidad entre cargas y desplazamientos), pequeños desplazamientos y cambios de forma (lo bastante para que sea buena aproximación plantear el equilibrio en la configuración indeformada), y ausencia de efectos dinámicos.

- *Resistencia de Materiales:*

Estudia el sólido con forma de barra esbelta, generalmente recta. Se asumen el resto de las hipótesis básicas usadas en la Teoría de la Elasticidad. La particularidad geométrica de que una dimensión sea mucho mayor que las otras dos, permite realizar simplificaciones muy útiles en el modelo matemático. Esta tipología de barra es mayoritariamente utilizada tanto en estructuras de edificación como de ingeniería civil, y en algunos casos en máquinas y mecanismos, de ahí la importancia de su estudio particular.

- *Teoría de Estructuras:*

Para enunciarlo brevemente, podemos decir que estudia el comportamiento de los sistemas de barras conectadas entre sí, bajo las mismas hipótesis que la Resistencia de Materiales. En realidad, la línea divisoria entre ambas disciplinas es confusa, siendo habitual incluir estudios de sistemas de barras sencillos en el ámbito de la Resistencia de Materiales. Por otra parte, muchos textos sobre Teoría de Estructuras abordan el estudio de fenómenos (como pueden ser la plasticidad o los grandes desplazamientos) que se salen de las hipótesis más típicas del primer estudio de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales.

MATERIALES Y MÉTODOS

- *MODELAMIENTO PARA UN MOMENTO CONSTANTE*

$$\frac{1}{R} = \frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dX_0}$$

$$Y' = \text{Tan}\theta$$

$$Y'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI}$$

$$Y'' = P'$$

$$Y' = P$$

$$\frac{P'}{[1 + (P)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI}$$

$$\lambda = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{P'}{[1 + (P)^2]^{\frac{3}{2}}} = \lambda$$

Antes de integrar se hace sustitución trigonométrica

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{1}{[1 + p^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Sin}(\theta) = \frac{p}{[1 + p^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \text{Cos}(\theta) = \int \lambda dx \quad \Rightarrow \quad \text{Sin}(\theta) = x + c$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = f(x) + c$$

$$Y = \int_0^x \frac{f(x) + M}{\sqrt{1 - (f(x) + M)^2}} dx$$

Integrando se obtiene la siguiente ecuación

$$Y = -\sqrt{-x^2 - 2Mx - M^2 + 1} + 2C1$$

- **MODELAMIENTO POR UNA CARGA PUNTUAL**

$$\lambda = \frac{PX}{EI}$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{PX}{EI}$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = f(x) + c$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Px^2}{2EI} + c$$

La constante de integración puede ser determinada por la condición de frontera de cero, en Y' con $X = L_0 = (L - \Delta)$

$$c = \frac{P(L - \Delta)^2}{2EI}$$

$$\frac{Y''}{[1 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Px^2}{2EI} + \frac{P(L - \Delta)^2}{2EI}$$

$$H(x) = \frac{Px^2}{2EI} + \frac{P(L - \Delta)^2}{2EI}$$

$$Y' = H(x)/[1 - (H(x))^2]^{\frac{1}{2}}$$

La deflexión de la viga debe ser evaluada en $0 \leq x \leq L_0$

y satisfacer la condición de frontera $x = L_0$ para evaluar la constante de integración.

Para hallar el valor del libre desplazamiento de la viga (Δ) en $H(x)$, se hace mediante esta ecuación

$$L = \int_0^{L_0} \frac{dx}{[1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Para determinar L en la ecuación anterior se debe ingresar la siguiente variable

$$\phi = x/(L - \Delta)$$

$$L = \int_0^{L_0} \frac{dx}{[1 + (y'H(\phi))^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Donde,

$$H(\phi) = \frac{P(L - \Delta)^2}{2EI} (\phi^2 - 1)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las imágenes 1 y 2 se presenta la comparación de los comportamientos entre el método encontrado para grandes deformaciones y la respuesta clásica de resistencia de materiales.

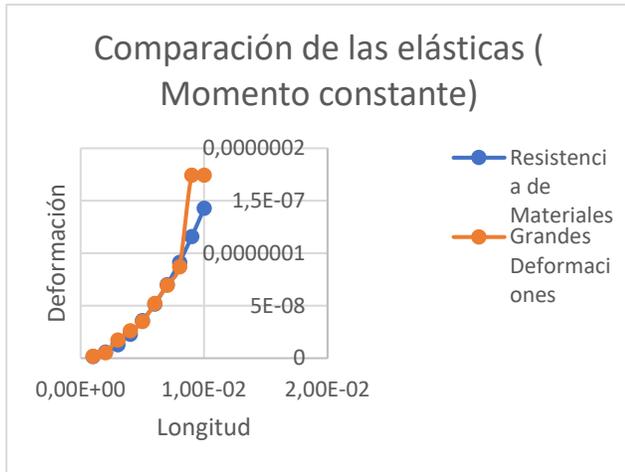


IMAGEN 1: Comparación de las elásticas para un momento constante

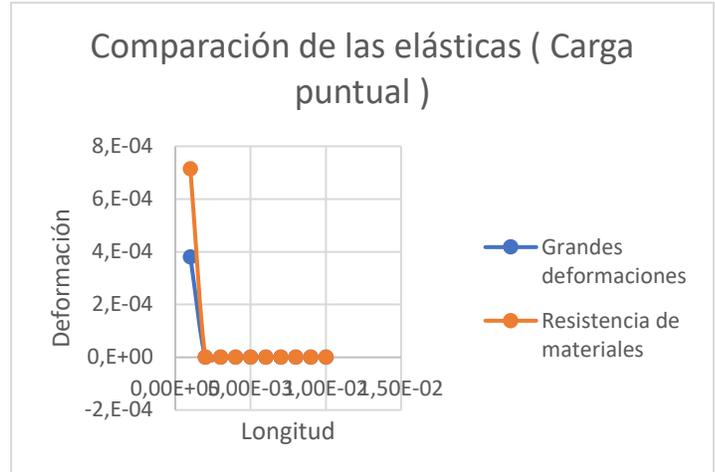


IMAGEN 2: Comparación de las elásticas para una carga puntual

A continuación, se puede observar en las imágenes 3 y 4 el comportamiento que presenta el método encontrado y el clásico, en su punto máximo de deflexión. (sus parámetros de frontera presentan el mismo rango para el correcto análisis)

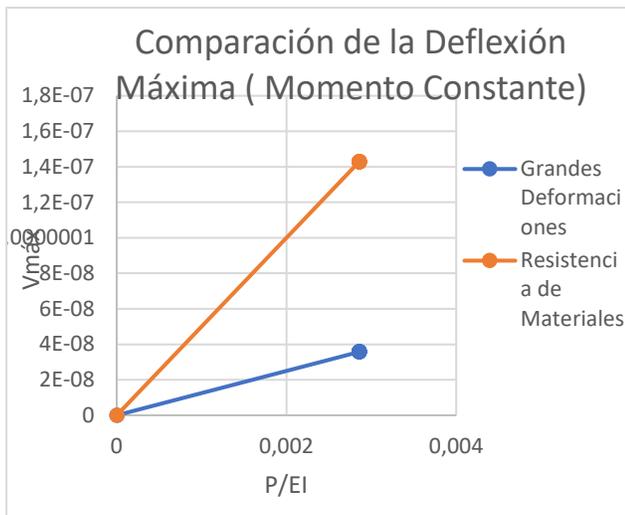


IMAGEN 3: Comparación de la deflexión máxima para un momento constante

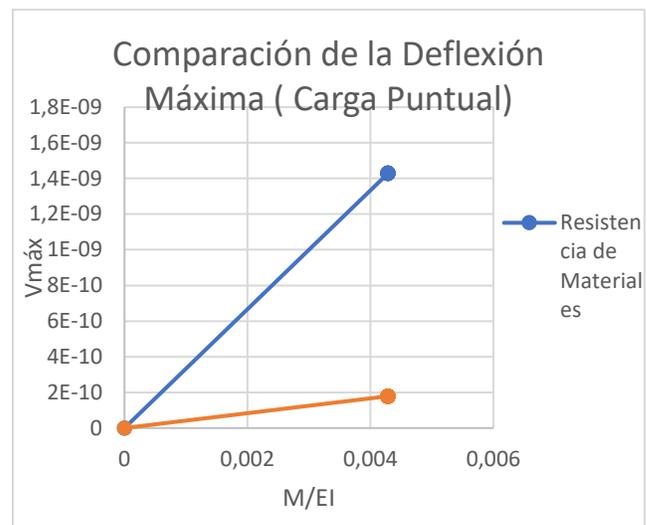


IMAGEN 4: Comparación de la deflexión máxima para una carga puntual

CONCLUSIONES

- Se logró obtener una solución con un comportamiento similar a la respuesta clásica de resistencia de materiales; sin embargo, dicha solución logra abarcar la deflexión en todas las posibles posiciones o desplazamientos que presente la viga.
- Se observó que tienden a presentar valores similares de deflexión, pero también se puede observar que presentan un punto crítico en el que su comportamiento presenta una variación.

REFERENCIAS

[1] Fertis, F. (2004). En F. Feliú Matilla (Ed.), No-lineal Mechanics (pp. 49-117).