JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

ANÁLISIS DE VIBRACIONES EN UN MECANISMO PLANO CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

Pérez Lona, José de Jesús (1), Cervantes Sánchez, J. Jesús (2)

1 [Licenciatura en Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato - Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [jdj.perezlona@ugto.mx]

2 [Departamento de Ingeniería Mecánica, División de ingenierías, Campus Irapuato - Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [jecer@ugto.mx]

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología para simular el fenómeno vibratorio asociado con el movimiento de una barra sobre un plano vertical. Se muestran algunas gráficas de la respuesta del sistema con diferentes parámetros mecánicos.

Abstract

This paper introduces an approach to simulate the mechanical behavior of a bar which moves on a vertical plane. Some plots are given to show the response of the system to several sets of mechanical parameters.

Palabras Clave Vibraciones mecánicas; barra; movimiento plano.

INTRODUCCIÓN

Predecir el comportamiento que tendrán las máquinas durante su operación puede ayudar a evitar que la máquina entre en resonancia y se pueda dañar o destruir por sí misma [1]. Es por eso que un conocimiento de la respuesta de la máquina sería muy beneficioso. El principal reto se debe a que el modelo dinámico típico de un sistema multicuerpo es altamente no lineal. En este trabajo se presenta un método sistemático y ordenado que puede ayudar en un mejor manejo de tales no linealidades. Como resultado, se obtienen las respuestas del sistema mecánico bajo estudio ante diferentes conjuntos de parámetros mecánicos representativos.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El método propuesto se mostrará con base en un caso de estudio. Para ello, en la Figura 1 se muestra el mecanismo que será analizado, el cual tiene un resorte con una constante de rigidez k y un amortiguador con una constante de amortiguamiento viscoso b. Los puntos A, B y C, representan los centros de masa de las dos correderas, 1, 2, y la barra, 3, las cuales tienen masas m_A, m_B y m_C, respectivamente. Además, se tiene una fuerza F aplicada en la dirección de movimiento de la corredera 2. Este mecanismo ha sido empleado por Doughty [2] como ejemplo para ilustrar la aplicación de las ecuaciones de Eksergian en sistemas mecánicos de un grado de libertad.

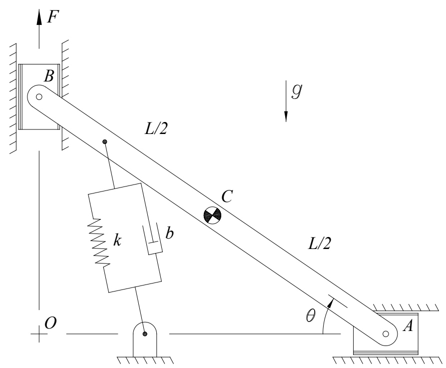

Figura 1: Mecanismo de estudio.

CINEMÁTICA

Diagrama cinemático auxiliar

Para el mecanismo mostrado en la Fig. 1, se propone el diagrama cinemático auxiliar mostrado en la Fig. 2. Por lo tanto, se tiene el siguiente vector de coordenadas generalizadas del mecanismo:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p & q & r & \theta & \phi \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

las cuales representan a los movimientos relativos que pueden generarse entre los diferentes elementos que componen al sistema mecánico bajo estudio.

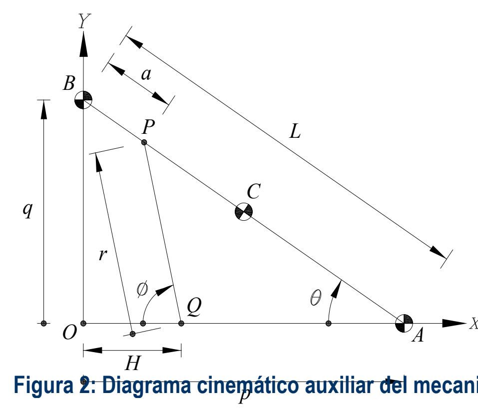

Figura 2: Diagrama cinemático auxiliar del mecanismo.

Ecuaciones de restricción en posición

Basándose en la geometría mostrada en la Fig. 2, se pueden obtener las siguientes ecuaciones de restricción en posición:

$$f_1 = a\cos\theta - H + r\cos\phi = 0 \quad (2)$$

$$f_2 = q - a\sin\theta - r\sin\phi = 0 \quad (3)$$

$$f_3 = p - H - (L-a)\cos\theta + r\cos\phi = 0 \qquad (4)$$

$$f_4 = (L-a)\sin\theta - r\sin\phi = 0 \qquad (5)$$

CINÉTICA

Las ecuaciones de movimiento del mecanismo bajo análisis serán obtenidas a partir de las ecuaciones de Lagrange, las cuales vienen dadas por [4]:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]^T - \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{Q}_{NC} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}_D \qquad (6)$$

donde el Lagrangiano para este sistema mecánico queda como:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{1}{2}m_A\dot{p}^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_C\dot{p}^2 + \frac{1}{2}m_C L\dot{p}\dot{\theta}\sin\theta + \\ &+ \frac{1}{6}m_C L^2\dot{\theta}^2 - m_B g q - m_C g\frac{L}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}k(r - l_{ND})^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Además, debido a que *F* es la única fuerza externa no conservativa que actúa sobre el mecanismo bajo estudio en la misma dirección y sentido en que fue definida la variable *q*, entonces, el vector de fuerzas no conservativas vendrá dado por:

$$\mathbf{Q}_{NC} = \begin{bmatrix} 0 & F & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (8)$$

Por otro lado, la matriz de restricción en velocidad $\mathbf{A}$ se define de tal manera que $\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, la cual, para el caso bajo estudio queda definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\phi & -a\sin\theta & -r\sin\phi \\ 0 & 1 & \sin\phi & -a\cos\theta & -r\cos\phi \\ 1 & 0 & \cos\phi & (L-a)\sin\theta & -r\sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & (L-a)\cos\theta & -r\cos\phi \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Dadas las ecuaciones de restricción en posición, (4)–(7), a cada una de estas se le asocia un multiplicador de Lagrange, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, respectivamente, así el vector de multiplicadores de Lagrange estará dado por:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^T \qquad (10)$$

Finalmente, el vector de fuerzas disipativas viene dado como:

$$\boldsymbol{\psi}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b\dot{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (11)$$

donde *b* es el coeficiente de fricción viscosa asociado con el amortiguador del sistema bajo estudio.

Resolviendo las ecuaciones de Lagrange para los multiplicadores de Lagrange, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\varepsilon_1\ddot{\theta} + \varepsilon_2\dot{\theta}^2 + \varepsilon_3\dot{\theta} + \varepsilon_4 \sin\theta + \varepsilon_5 \cos\theta = 0 \qquad (12)$$

donde:

$$\varepsilon_1 = \left(m_A \sin^2\theta + m_B \cos^2\theta + \frac{m_C}{3} \right) L^2 \qquad (13)$$

$$\varepsilon_2 = (m_A - m_B) L^2 \sin\theta \cos\theta \qquad (14)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{\left[\left(Ha + (L^2 - 2La)\cos\theta \right) \right]^2}{r^2} \right) b \sin^2\theta \qquad (15)$$

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{(\Delta - l_{ND}) \left(Ha + (L^2 - 2La)\cos\theta \right)}{r} \right) k \qquad (16)$$

$$\varepsilon_5 = \left(-F + \left(m_B + \frac{m_C}{2} \right) g \right) L \qquad (17)$$

la cual depende únicamente de la variable θ, y muestra una estructura matemática altamente no lineal.

EQUILIBRIO ESTÁTICO

El equilibrio estático se define como:

$$\theta = \theta_E,\ \dot{\theta} = 0,\ \ddot{\theta} = 0. \qquad (18)$$

donde θ_E representa la posición de equilibrio estático. Sustituyendo la ecuación (18) en la ecuación (12) se obtiene:

$$k\left\{\frac{(r_E - l_{ND})\left(Ha + (L^2 - 2La)\cos\theta_E\right)}{r_E}\right\}\sin\theta_E + \\ +\left\{-FL + (m_B + \frac{m_C}{2})Lg\right\}\cos\theta_E = 0,\ r_E = r(\theta = \theta_E). \qquad (19)$$

Utilizando la sustitución trigonométrica de Weierstrass en la ecuación (19), resulta en una ecuación polinomial:

$$\sum_{i=0}^{12}\sigma_i \tau^i = 0 \qquad (20)$$

de grado 12 en τ. Entonces dependiendo de los valores numéricos de los parámetros característicos del sistema es posible obtener hasta un máximo de doce posiciones de equilibrio.

PERTURBACIÓN Y LINEALIZACIÓN

Considerando pequeñas oscilaciones θ_P, alrededor de la configuración de equilibrio θ_E, se tiene que:

$$\theta = \theta_E + \theta_P,\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_P,\ \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_P \qquad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (12), y con el objetivo de reducir la complejidad de un sistema no lineal, y de obtener un modelo manejable para el análisis de vibraciones, se utilizan series de Taylor y se conservan sólo los términos lineales, así obteniendo que:

$$M_{EQ}\ddot{\theta}_P + B_{EQ}\dot{\theta}_P + K_{EQ}\theta_P = 0 \qquad (22)$$

donde:

$$M_{EQ} = \frac{L^2}{2}(m_A + m_B + \frac{2}{3}m_C + (m_B - m_A)(2\cos^2\theta_E - 1)) \qquad (23)$$

$$B_{EQ} = \left(\frac{\left[\left(Ha + (L^2 - 2La)\cos\theta_E\right)\sin\theta_E\right]^2}{\rho_E^{\,2}}\right)b \qquad (24)$$

$$K_{EQ} = (FL - Lg(m_B + \frac{1}{2}m_C))\sin\theta_E + \\ +\left(\frac{\left(Ha\cos\theta_E + (L^2 - 2La)(\cos^2\theta_E - \sin^2\theta_E)\right)(\rho_E - l_{ND})}{\rho_E} + \\ +\frac{\left[\left(Ha + (L^2 - 2La)\cos\theta_E\right)\sin\theta_E\right]^2 l_{ND}}{\rho_E^{\,3}}\right)k. \qquad (25)$$

$$\rho_E = \sqrt{a^2 + H^2 - 2aH\cos\theta_E + (L^2 - 2La)\sin^2\theta_E} \quad (26)$$

EJEMPLO NUMÉRICO Y RESULTADOS

Con el fin de ilustrar de manera numérica el análisis presentado en este trabajo, se consideran los parámetros mostrados en la Tabla 1. Se ha considerado la misma masa para los tres elementos inerciales.

Tabla 1: Parámetros numéricos del sistema.

Parámetro.	Valor, unidades.
H	0 *m*
L	1 *m*
m_A=m_B=m_C	1 *kg*
k	3500 *N/m*
b	875 *N-s/m*
l_{ND}	0.15 *m*
F	110 *N*

A partir de las expresiones (20), y (23)–(26), se calculan los coeficientes de la ecuación (22). En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos para el caso de estudio.

Tabla 2: Resultados.

a (m)	θ_E (º)	M_{EQ} (kg·m²)	B_{EQ} (N·s/m)	K_{EQ} (N/m)
0	10.2081	1.3333	847.5177	3390.1
0.25	1.9535	1.3333	4.0251	716.0727
0.5	90	1.3333	0	95.285
1	81.6058	1.3333	856.3529	3521.7

Posteriormente, integrando numéricamente la ecuación (16) se obtuvieron las Figuras 3, 4 y 5. Dichas figuras muestran la respuesta del sistema mecánico al transcurrir el tiempo.

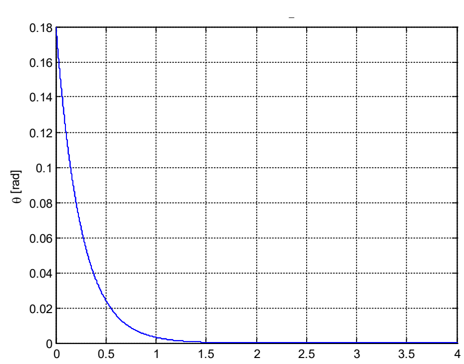

Figura 4: Respuesta del sistema con *a* =0.25 y θ_E=1.9535º.

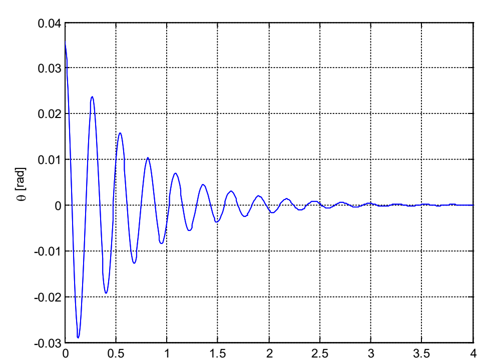

Figura 3: Respuesta del sistema con *a* =0 y θ_E=10.2081º.

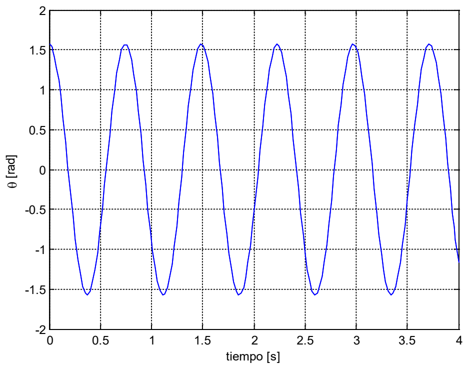

Figura 5: Respuesta del sistema con *a* =*0.5* y θ_E=*90º*.

CONCLUSIONES

En las Figuras 3, 4 y 5 se pueden apreciar tres tipos de respuesta del sistema. La Figura 3 respresenta un movimiento sobreamortiguado. Por su parte la Figura 4 muestra las características relacionadas con un movimiento subamortiguado. Finalmente, analizando la forma de la respuesta del sistema mostrada en la Figura 5, se observa que la influencia del amortiguamiento es prácticamente nula.

REFERENCIAS

[1] S. S. Rao, Mechanical Vibrations, Sixth Edition, Pearson Education, Inc., p. 39 (2018).
[2] S. Doughty, Single degree of freedom mechanism vibration near equilibrium. Mechanism and Machine Theory, 31 (1996) 339.
[3] J. Angeles, Fundamentals of robotic mechanical systems. New York: Springer-Verlag (2014).