

SISTEMA DE CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL BASADO EN CONTROL MODERNO

Arévalo Parra, Paola Aránzazu (1), Vergara Esparza, Rosalía (2), Flores Alvarado Manuel (3), Guevara Carrillo, Valentín (4), Serrano Martínez, Adrián Aarón (5), Zaleta Amador, Carlos Antonino (6)

1 [Ingeniería Mecatrónica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [paola12083@gmail.com]

2 [Ingeniería en Sistemas Automotrices, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [rosalia.vergara@itesi.edu.mx]

3 [Ingeniería en Sistemas Automotrices, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [mane_132@hotmail.com]

4 [Ingeniería Mecatrónica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [guevaravalentín@hotmail.com]

5 [Ingeniería Mecatrónica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [adrian.96.aaron@gmail.com]

6 [Ingeniería Mecatrónica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato] | [tronixcaza1@gmail.com]

Resumen

Los péndulos a lo largo de la historia han sido objeto de estudio dado a su análisis de control no-lineal, propósitos educativos y su amplia gama de aplicaciones en las cuales pueden ser implementados, tal es el caso de robots móviles, robots caminantes, robots nadadores, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue vertical, proyectiles, entre muchos otros. En complemento con los péndulos, se encuentra la implementación del área de control, la que en la industria ha apoyado considerablemente a la mejora de la calidad de los productos fabricados, al aumento de la eficiencia de los procesos, a la minimización del consumo de energía, entre otros. En particular, el péndulo invertido rotacional es un interesante sistema dinámico no-lineal complejo que permite ilustrar varios principios de control. Dado el interés del estudio de los péndulos y sus aplicaciones en la ingeniería mecatrónica, el actual trabajo presenta un control basado en el diseño de un control PID para la posición del péndulo cercano o sobre el punto de equilibrio deseado, así como un Swing-up para impulsar al péndulo y mantenerlo en la parte posterior de la base cuando se encuentre por debajo de la misma y así mantenerlo cerca de la posición deseada.

Abstract

Pendulums throughout history have been the object of study given to their analysis of non-linear control, educational purposes and their wide range of applications in which they can be implemented, such as mobile robots, walking robots, robots swimmers, space rockets, satellites, vertical takeoff aircraft, projectiles, among many others. In addition to the pendulums, there is the implementation of the control area, which in the industry has considerably supported the improvement of the quality of manufactured products, increased process efficiency, minimized energy consumption, among others. In particular, the rotational inverted pendulum is an interesting complex nonlinear dynamic system that illustrates several control principles. Given the interest of the study of pendulums and their applications in mechatronics engineering, the present work presents a control based on the design of a PID control for the position of the pendulum nearby or on the desired equilibrium point, as well as a Swing-up to propel the pendulum and hold it in the back of the base when it is underneath it and so keep it near the desired position

Palabras Clave

Péndulo invertido rotacional; PID; Swing-up.

INTRODUCCIÓN

Los péndulos han sido objeto de estudio de gran importancia para la física, véase el ejemplo del estudio de vibraciones mecánicas, el cual evoluciono gracias a los estudios sobre el péndulo simple realizado por Galileo Galilei. Su relevancia no se ha visto afectada por el tiempo véase el ejemplo del área de control existen mecanismos pendulares sub actuados, es decir que poseen menos actuadores que grados de libertad, los cuales son perfectos análogos de otros sistemas tales como cohetes, robots bípedos, brazos robóticos, drones e incluso los segways [3].

Gracias a tal relevancia se han realizados una amplia variedad de experimentos, que a pesar de su escasa área de aplicación son de sobresaliente importancia didáctica. Entre existen estudios que giran en torno a “péndulo invertido sobre un vehículo” el cual consiste en una barra unida a un carro por uno de sus extremos, este se mueve dentro de las limitaciones de un riel por acción de una fuerza externa, con el objetivo de mantener a la varilla en la posición vertical inestable, sin embargo, el control del sistema se encuentra limitado por la extensión de la vía. En la imagen 1 se muestra el mecanismo de un péndulo invertido rotacional, el cual pasa por alto las restricciones del modelo original [6].

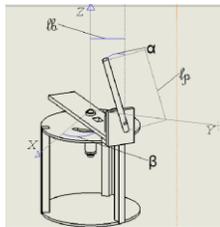


IMAGEN 1. Modelo del péndulo invertido rotacional

Dentro del presente trabajo realizamos una propuesta de control enfocada a realizar un control PID sobre el péndulo rotacional, consiguiendo mantener este en su posición vertical despreciando la posición del brazo a diferencias de otros estudios de la misma rama donde se optan por un control enfocado al estudio de espacio de estados.

MATERIALES Y MÉTODOS

Los parámetros físicos de la planta son especificados por la tabla 1.

Tabla 1: Parámetros físicos de la planta

Parámetros	Valor	Unidad
	Masa brazo (m_b)	0.049
Masa péndular (m_p)	0.044	kg
Longitud brazo (l_b)	0.145	m
Longitud péndular (l_p)	0.142	m
Inercia del pilar central (J_{pc})	1.7440×10^{-4}	kgm ²

El control del péndulo rotacional se requirió el uso de los materiales listados a continuación.

- Pololu20.4:1 Metal Gearmotor 25Dx50L mm HP
- Encoder Honeywell 600-128-CBL
- Motor driver L298n
- Placa Arduino UNO
- Sensores de presencia infrarrojos
- Pic 18f4550
- Módulos Bluetooth HC-05 y HC-06

En la tabla 2 se muestran las características específicas del motor Pololu utilizado en el presente trabajo.

Tabla 2: Características del motor Pololu

Parámetros		
	Valor	Unidad
Resistencia (R)	45.05	Ω
Inercia (J_m)	10.67×10^{-9}	$Kg \cdot m^2$
Cte. Torque (k_t)	0.02	$N \cdot m/A$
Cte. FEM (K_e)	0.02	$V \cdot s/rad$
Volt. nominal V_n	12	V

Sistema de control

De manera general el control de la planta es logrado gracias a la conmutación entre dos tipos de controlador uno destinado a lograr la posición de equilibrio mediante un PID y un algoritmo capaz de llevarlo cerca de dicha posición.

Control PID

Partiendo de las relaciones dinámicas de la planta representadas por el siguiente modelo matemático representado por ecuaciones de estados 1), 2), 3) y 4) donde las variables de estado corresponden a $x_1 = \beta$, $x_2 = \dot{\beta}$, correspondiente a la posición y velocidad del brazo y $x_3 = \alpha$, $x_4 = \dot{\alpha}$ siendo la posición y velocidad del brazo.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\sigma\lambda - \gamma^2 + (\lambda^2 + \gamma^2) \sin^2 x_3} (\lambda\tau_\beta - \lambda\gamma x_2^2 \cos^2 x_3 \sin x_3 - 2\lambda^2 x_2 x_4 \cos x_3 \sin x_3 + \lambda\gamma x_4^2 \sin x_3 - \gamma\delta \cos x_3 \sin x_3) \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{(\sigma\lambda + \lambda^2 \sin^2 x_3 + \gamma^2 \sin^2 x_3 - \gamma^2)} (\lambda\delta \sin^3 x_3 + \dot{x}_2 \gamma^3 \cos x_3 + \sigma\delta \sin x_3 - x_4^2 \gamma^2 \cos x_3 \sin x_3 - \delta\gamma^2 \cos^2 x_3 \sin x_3 - \dot{x}_2 \gamma^3 \cos x_3 \sin^2 x_3 + x_2^2 \lambda^2 \cos x_3 \sin^3 x_3 - x_2^2 \lambda \gamma^2 \cos^3 x_3 \sin x_3 + x_2^2 \sigma\lambda \cos x_3 \sin x_3 - \dot{x}_2 \sigma\lambda \gamma \cos x_3 +$$

$$x_4^2 \lambda \gamma^2 \cos x_3 \sin x_3 - \dot{x}_2 \lambda^2 \gamma \cos x_3 \sin^2 x_3 - 2x_2 x_4 \lambda \gamma \cos^2 x_3 \sin x_3) \quad (4)$$

donde:

$$\sigma = J + \left(\frac{1}{3} m_b + m_p\right) l_b^2 \quad \lambda = \left(\frac{1}{3} m_p\right) l_p^2$$

$$\delta = \left(\frac{1}{2} m_p\right) g l_p \quad \gamma = \frac{1}{2} m_p l_a l_p$$

Posteriormente se obtiene el modelo lineal alrededor de un punto de operación de interés el cual corresponde a [$x_1 = n$, $x_2 = 0$, $x_3 = k\pi$ y $x_4 = 0$] donde $k=0$ para cumplir con las condiciones de problema y n es seleccionado arbitrariamente debido a la irrelevancia de este parámetro para el mismo, mediante una manipulación algebraica se consigue una relación de entrada salida entre la aceleración del brazo y posición del péndulo 5). Por tanto, se obtienen, las matrices de estado 6), 7), 8) y 9) linealizadas alrededor de la posición vertical [15,16].

$$\dot{x}_4 = \frac{-\dot{x}_2(\gamma^3 - \sigma\lambda\gamma)}{(-\gamma^2 + \sigma\lambda)} - \frac{x_3(\sigma\lambda - \delta\gamma^2)}{(-\gamma^2 + \sigma\lambda)} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\delta\gamma^2 + \sigma\delta}{\gamma^2 - \sigma\lambda} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma^3 - \sigma\lambda\gamma}{\gamma^2 - \sigma\lambda} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8) \quad D = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo los parámetros físicos contenidos en la tabla 1. Podemos convertir las matrices de estado en la función de transferencia 10) correspondiente a la planta.

$$H_p(s) = \frac{\alpha(s)}{s^2 \beta(s)} = \frac{0.453 \times 10^{-3}}{s^2 + 121.665} \quad (10)$$

Siendo que la función de transferencia 5) relaciona la posición del péndulo con la aceleración del brazo, es necesario conseguir una expresión para esta, sabiendo que el brazo está conectado a un motor eléctrico DC y experimenta la misma aceleración angular que esté presente, por lo que se puede partir de la función de transferencia del mismo y considerando $L \ll J_m, R, k_e, k_t, B$ y $k_t \cong k_e$ la expresión que relaciona la aceleración angular con el voltaje de entrada el cual

corresponde a nuestra señal de control, obtenemos la expresión de la ecuación 11).

$$H_m(s) = \frac{s^2 \beta(s)}{V(s)} = \frac{kt \cdot s}{R(sJ_m + B) + Ke^2} \quad (11)$$

Debido a las limitantes que acompañan el elegir un método por PID, las cuales incluyen el carecer de condiciones iniciales, la organización del diagrama de bloques difiere de la convencional, esta debe representar un sistema cuya condición inicial corresponde a $\alpha = 0$ el cual recibe una perturbación en un tiempo $t > 0$ así el objeto de estudio pasa a ser que tan rápido el sistema pueda regresar a su primer estado. Posteriormente se seleccionan las ganancias $k_p = 192.555621$, $k_i = 80.75862$ y $k_d = 4.13934$ que favorecen la respuesta en estado estacionario.

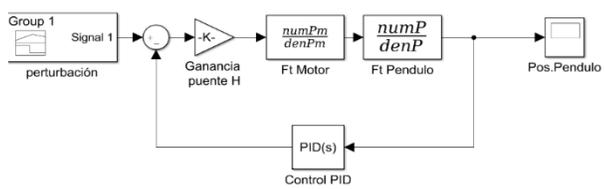


IMAGEN 2. Representación en diagrama de bloques del sistema Péndulo Rotacional

La imagen 2 muestra el diagrama de bloques completo de la planta. Una referencia es definida por el usuario, en este caso $\alpha = 0$, las funciones de transferencia del motor y el péndulo relacionan la posición del péndulo y el voltaje aplicado al motor el cual generara una aceleración angular en el brazo horizontal, dando como salida una posición angular en el péndulo, esta posición ingresa como variable de estado al controlador PID, el cual lo compara con la referencia y emite un pulso PWM que es amplificado por el puente H para lograr emitir un voltaje suficientemente alto para mover el motor.

Algoritmo del control swing -Up

Se consideran las fuerzas que actúan sobre el péndulo, ignorando la dinámica de la base tal como se muestra en la ecuación 12). Siendo u una variable controlable. [7]

$$J_p \ddot{\alpha} + m_p l_p u \cos \alpha - m_p l_p g \sin \alpha = 0 \quad (12)$$

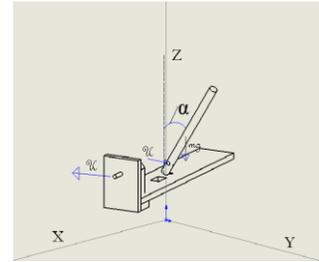


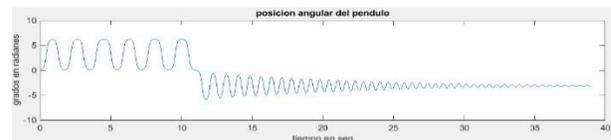
IMAGEN 3. Planta Simplificada

El control es diseñado bajo conceptos de energía utilizando mecánica de LaGrange, basado en la conservación de la energía $E_t = E_p + E_c$, la idea principal es conseguir un valor de u tal que sea capaz de modificar la energía del péndulo hasta que $E_t = 0$, la cual corresponde a la posición vertical del péndulo, de esta forma se obtiene la señal de control [6] donde E representa la energía actual del sistema la cual inicialmente es $E_i = -2m_p g$, E_0 es la energía de referencia la cual debe ser ideada con holgura, k es una ganancia proporcional y la función *sign* aporta la dirección de giro. La señal de control puede ser representada en términos de voltaje, siendo esta la variable de interés a controlar en el sistema, tal como se muestra en la ecuación 13). [6], [12], [17]

$$V = \frac{R}{kt} \left[\frac{J}{lb} k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\alpha} \sin \alpha) + \frac{k_e k_t}{R} \dot{\beta} \right] \quad (13)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La imagen 5 muestra las gráficas de las posiciones del brazo y péndulo, dentro de la gráfica del b) podemos apreciar movimientos bruscos al inicio, donde tiene lugar el algoritmo de control e energía Swing-Up para con forme se acerca a la posición vertical experimentar movimientos más finos propios del PID.



a) Posición angular del péndulo



b) Posición del brazo horizontal del sistema

IMAGEN 4. Graficas de posición a) angular del péndulo y b) del brazo horizontal del sistema

CONCLUSIONES

Se efectuó el control sobre el péndulo rotacional invertido empleando la estrategia de conmutación entre controladores, tomando como método de control global la propuesta de Amström Furuta, que en conjunto lo elevan a una posición cercana al control tras esto es aplicado un control PID el cual es establecido por medio de un modelo simplificado del péndulo rotacional.

REFERENCIAS

- [1] A. Valera, M. V. (s.f.). *DESARROLLO Y CONTROL DE UN PÉNDULO DE FURUTA*. Universidad Politécnica de Valencia: Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática .
- [2] Andrew Careaga Houck, R. (2013). *Furuta Pendulum*. Massachusetts: department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology .
- [3] C. A. Merlo-Zapata, M. A.-C.-O.-C.-M. (1 de Mar de 2014). *SISTEMAS MECÁNICOS SUBACTUADOS PENDULARES*. Recuperado el 27 de Mar de 2017, de Boletín UPIITA: <http://www.boletin.upiita.ipn.mx/index.php/ciencia/561-cyt-numero-42/952-sistemas-mecanicos-subactuados-pendulares>
- [4] Carnegie Mellon The university of Michigan 1817. (28 de 8 de 1996). *Control Tutorials for matlab*. Obtenido de Example: Solution of the inverted PEndulum Problem Using PID Control: 1996
- [5] Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería mecánica dinámica*. México: Pearson Educación.
- [6] J. Aracil, F. G. (Abril 2005). El Péndulo Invetido: Un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*. Vol.2. Núm. 2, 8-19.
- [7] K.J. Aström, K. F. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* 36, 287-295. Obtenido de www.elsevier.com/locate/automatica
- [8] Luisa F. Escobar-Dávila, O. D.-G.-B. (enero-junio de 2013). Control Global del Péndulo de Furuta. *Tecno. Lógicas.*, ISSN 0123-7799, No. 30, 72-94.
- [9] Ogata, K. (1996). *Sistema de control en tiempo discreto*. Mexico, Nueva York: Prentice Hall Hispanoamerica, S.A.
- [10] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Person Educación.
- [11] Ogata, K. U. (1987). *Dinamica de sistemas*. México, Englewood Cliffs, : PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A. .
- [12] Oscar Danilo Montoya Giraldo, Juan Guillermo Valenzuela Hernández, Didier Giraldo Buitrago . (Diciembre de 2012. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701). Control global del Péndulo Rotacional Invertido empleando modelos de energía. *Scientia et Technica Año XVII, No 52, 16-26*.
- [13] Prof. Hugo Arellano, D. M. (2008). *Sistemas Newtonianos*. Univesidad de Chile: Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas.
- [14] Ricardo, G. C. (2014). *Estatica. Las leyes del euilibrio*. Mexico. DF: Grupo editorial Patria.
- [15] Sanches Sardi, H. E., Patete, A., & Aguirre, I. (enero-abril,2011). Control de un péndulo invetido basado en un modelo reducido. *INFENIERÍA UC, núm. 1., 12-22*.
- [16] Victor Manuel Hernández Guzmán, R. S. (2013). *CONTROL AUTOMÁTICO Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*. México, DF, Mexico,: Colección CIDETEC del Instituto Politécnico Nacional.
- [17] ZÚÑIGA, C. A. (2009). *DISEÑO, CONSTRUCCION Y CONTROL DE UN PENDULO INVERTIDO ROTACIONAL UTILIZANDO TECNICAS LINEALES Y NO LINEALES*. BOGOTA, D.C.: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA FACULTAD DE INGENIERIA MAESTRIA EN INGENIERIA .