

COMPUTACIÓN DE LOS FACTORES GEOMÉTRICOS DE RESISTENCIA Y DURABILIDAD DE ENGRANES RECTOS NO ESTÁNDAR

Pérez Zamudio, Fernando Tomás (1), Saavedra Tinjaca, Miguel Ángel (2), Rico Martínez, José María (3), Cervantes Sánchez, J. Jesús (4)

1 Lic. en Ingeniería Mecatrónica, Universidad de Guanajuato | ft.perezamudio@ugto.mx

2 Lic. en Ingeniería Mecánica, Universidad de Santo Tomas | miguelsaavedra@usantotomas.edu.co

3 Dpto. de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato
| jrco@ugto.mx

4 Dpto. de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato
| jecer@ugto.mx

Resumen

Esta contribución presenta las herramientas necesarias para la determinación de los coeficientes geométricos de resistencia y durabilidad para engranes rectos estándar y no-estándar. Este es un tema interdisciplinario que requiere conocimientos de la cinemática de las máquinas ---en particular de la interacción entre dos engranes cuyo perfil corresponde a la curva involuta de un círculo--- y diseño de elementos mecánicos. Como un resultado adicional, el análisis permite determinar de manera precisa el perfil de los dientes de engrane para diferentes tipos de cortadores y analizar de manera muy intuitiva el fenómeno de socavamiento.

Abstract

The necessary tools for the determination of the geometric coefficients of strength and durability of standard and non-standard spur gears are presented in this contribution. This is an interdisciplinary subject that requires knowledge of kinematics of machinery ---specifically the interaction between a pair of gears whose profile is given by the involute curve of a circle--- and the design of machine elements. As an additional result, the analysis allows to determine in a very precise manner the profile of the gear teeth for different types of cutting tools and to analyze in a very intuitive manner the undercutting phenomenon.

Palabras Clave

Palabras Clave 1. Engranes rectos; 2. Simulación; 3. Curva Involuta; 4. ; 5. Diseño de engranes. ; 6. Curva Trocoide

INTRODUCCIÓN

La currícula tradicional de la gran mayoría de los programas de ingeniería mecánica incluye, dentro del curso de Cinemática de las Máquinas, una revisión muy superficial acerca del perfil de involuta de los dientes de engrane y de la involutometría, para dedicar más tiempo al estudio de los trenes de engranes. Desafortunadamente, cuando, dentro de alguno de los cursos de Diseño Mecánico, se aborda el tema de diseño de engranes, los participantes, y en ocasiones el instructor, desconocen la estrecha relación entre la cinemática de los engranes y su diseño. Como consecuencia, el diseño de engranes se aborda como un tema totalmente dissociado de la cinemática de las máquinas llevando a un aprendizaje parcial y necesaria incompleto de este importante tema, [1].

En esta contribución se presenta una narrativa unificada de la cinemática de los engranes, la involutometría y la determinación de los factores geométricos de resistencia y durabilidad de los engranes rectos estándar y no estándar, la puerta de entrada al diseño de engranes. El objetivo es que los participantes de cursos de cinemática de las máquinas o del diseño de elementos de máquina obtengan una visión comprensiva del tema.

INVOLUTOMETRÍA

Se partirá de la definición de la involuta de un círculo: La curva involuta de un círculo es el lugar geométrico de la punta de una cuerda que se desenrolla, manteniéndola tensa, a partir del círculo correspondiente, este círculo se conoce como círculo base vea IMAGEN 1.

El eje X se ha orientado convenientemente para que el punto de inicio de la involuta, A , yacza sobre el eje X . El ángulo θ se denomina el ángulo de rodado de la involuta. De la definición de la curva involuta, se tiene que la distancia AB , medida en el círculo base, y la distancia BP es la misma.

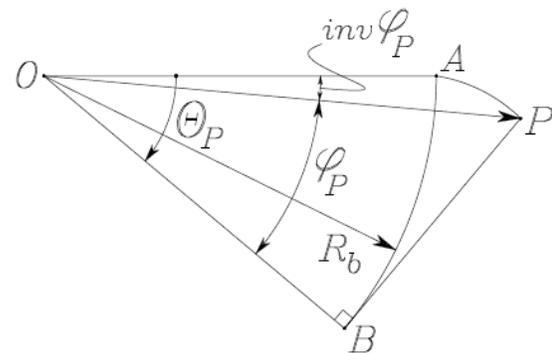


IMAGEN 1: Curva Involuta generada a partir de un círculo base de radio R_b .

Donde P es un punto arbitrario sobre la curva involuta. De la figura, si θ_P es el ángulo de rodado correspondiente, R_P es el radio del círculo desde el centro del engrane hasta el punto P y ϕ_P es el ángulo de presión de la involuta, definido como:

$$\phi_P = \text{ángulo}(BOA) - \text{ángulo}(POA) \quad (1)$$

Se tiene que

$$R_b \theta_P = \overline{BP} = R_b \tan \phi_P \quad (2)$$

Por lo tanto.

$$\phi_P = \tan^{-1} \theta_P \quad (3)$$

Es importante notar que conociendo el ángulo de rodadura es posible determinar el radio correspondiente, pues

$$\theta_P = \frac{\sqrt{R_P^2 - R_b^2}}{R_b} = \sqrt{\frac{R_P^2}{R_b^2} - 1} \quad (4)$$

Por lo tanto

$$R_P = R_b \sqrt{\theta_P^2 + 1} \quad (5)$$

DETERMINACIÓN DEL PERFIL DEL FILETE

Se iniciará con la definición de la curva trocoide de un círculo: La curva trocoide de un punto respecto a un círculo es el lugar geométrico de un punto fijo a un cuerpo rígido que rueda sin deslizar sobre el

círculo; así pues, hay una curva trocoide por cada punto del cuerpo rígido que rueda sin deslizar respecto al círculo.

El cuerpo rígido que rueda sin deslizar sobre el círculo es una línea recta —puntos fuera de esa línea recta pueden considerarse rígidamente unidos a la recta, de manera que es posible obtener las curvas trocoides asociadas a puntos fuera de esa línea recta. Se supondrá que el círculo tiene un radio, R , que después se igualará al radio de paso de corte del engrane, que el punto que describe la curva trocoide, denominada por M , tiene una distancia mínima con respecto a la línea, b . Además, se supondrá que en la posición inicial, la línea es vertical, de manera que el centro del círculo, punto O , el punto, M y el punto de la línea más cercana al punto M yacen en una línea horizontal. Finalmente, el punto que en la posición inicial interseca el radio del círculo con la línea se denomina B , este punto B es también el punto de la línea más cercano al punto M .

Si θ es el ángulo de rodado y se considera exclusivamente la rotación, el punto B se mueve al punto B' , las coordenadas de este punto son

$$x_{B'} = R \cos \theta \quad y_{B'} = R \sin \theta \quad (6)$$

Puesto que el movimiento de la línea respecto al círculo es de rodadura pura, se tiene que el perímetro del arco BB' debe ser igual a la longitud $\overline{BB''}$; es decir que

$$BB' = \overline{BB''} = R\theta \quad (7)$$

de manera que las coordenadas del punto B'' están dadas, a partir de la ecuaciones (6) y (7), por

$$x_{B''} = R \cos \theta + R\theta \sin \theta \quad ; \quad y_{B''} = R \sin \theta - R\theta \cos \theta \quad (8)$$

Finalmente, las coordenadas del punto M , fija a la línea que rueda sin deslizar sobre el círculo y que describe la curva trocoide está dada por

$$x_M = x_{B''} - b \cos \theta = (R - b) \cos \theta + R\theta \sin \theta$$

$$y_M = y_{B''} - b \sin \theta = (R - b) \sin \theta - R\theta \cos \theta \quad (9)$$

Estas fórmulas representan las coordenadas paramétricas de la curva trocoide descrita por el punto M en términos del parámetro, θ , que representa el ángulo de rodado.

Vectorialmente, el vector de posición del punto de la trocoide está dado por

$$\begin{aligned} \vec{r}_M &= x_M \hat{i} + y_M \hat{j} \\ &= ((R - b) \cos \theta + R\theta \sin \theta) \hat{i} + ((R - b) \sin \theta - R\theta \cos \theta) \hat{j} \end{aligned} \quad (10)$$

Determinación de la pendiente de la tangente y la normal a la curva trocoide.

En esta sección se determinará la pendiente de la tangente y la normal de la curva trocoide del punto M , el proceso requiere las derivadas de las ecuaciones paramétricas respecto al ángulo de rodado, θ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dx_M}{d\theta} &= -(R - b) \sin \theta + R \sin \theta + R\theta \cos \theta \\ &= b \sin \theta + R\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_M}{d\theta} &= (R - b) \cos \theta - R \cos \theta + R\theta \sin \theta \\ &= -b \cos \theta + R\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, la derivada de la curva trocoide está dada por

$$m = \frac{dy_M}{dx_M} = \frac{-b \cos \theta + R\theta \sin \theta}{b \sin \theta + R\theta \cos \theta} \quad (13)$$

La ecuación (13) proporciona la pendiente de tangente de la curva trocoide. Puesto que la normal a la curva trocoide es perpendicular a la tangente, las pendientes de estas rectas satisfacen la ecuación

$$mm_1 = -1$$

donde m_1 es la pendiente de la normal a la curva trocoide, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{1}{m} = -\frac{b\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta}{-b\cos\theta + R\theta\operatorname{sen}\theta} \\
 &= \frac{b\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta}{b\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Entonces, las componentes de un vector normal a la curva trocoide, están dadas por

$$\vec{n}_T = (b\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta)\hat{i} + (b\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta)\hat{j} \quad (15)$$

un vector unitario en la dirección de la normal a la curva trocoide está dada por

$$\hat{n}_T = \frac{(b\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta)\hat{i} + (b\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta)\hat{j}}{\sqrt{b^2 + R^2\theta^2}} \quad (16)$$

Determinación de la curva del filete del diente del engrane.

A partir de la determinación de la curva trocoide del punto M y su normal es posible determinar la curva del filete del diente del engrane. Suponga que r_f es el radio de la punta de la cremallera con que se corta el engrane, se tiene que la ecuación de la curva del filete, \vec{r}_{cf} , está dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{cf} &= \vec{r}_M + r_f \hat{n}_T = r_{cfx}\hat{i} + r_{cfy}\hat{j} \quad (17) \\
 &= \left[(R-b)\cos\theta + R\theta\operatorname{sen}\theta + r_f \frac{(b\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{b^2 + R^2\theta^2}} \right] \hat{i} \\
 &+ \left[(R-b)\operatorname{sen}\theta - R\theta\cos\theta + r_f \frac{(b\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta)}{\sqrt{b^2 + R^2\theta^2}} \right] \hat{j}
 \end{aligned}$$

Las coordenadas polares de la curva del filete estarán dadas por

$$r_{cf} = \sqrt{r_{cfx}^2 + r_{cfy}^2} \quad ; \quad \theta_{cf} = \arctan \frac{r_{cfx}}{r_{cfy}} \quad (18)$$

donde la función tangente inversa debe calcularse siguiendo las reglas del círculo trigonométrico.

En la IMAGEN 2 se puede apreciar la trayectoria de la curva trocoide la cual llegará a intersectar la curva involuta para formar así el perfil del diente. La curva trocoide sobrepasa a la curva involuta en este particular caso solo con fin ilustrativo al lector, sin embargo, ésta no debe pasar más allá de la curva involuta. Dicha imagen es una ampliación (y con diferentes colores) de la IMAGEN 6.

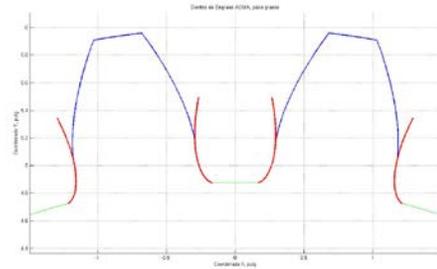


IMAGEN 2: Intersección de la curva involuta (azul) con la curva trocoide (rojo) formando así el filete del diente del engrane recto.

DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES DE OPERACIÓN CRÍTICAS

En esta sección se realizarán la determinación de las posiciones de operación críticas, de la pareja de engranes, en cuanto a las consideraciones de resistencia y durabilidad.

Determinación del punto de contacto más bajo entre un par de dientes

Ahora, es posible determinar el punto de contacto más bajo entre un par de dientes. El primer punto de contacto de un engrane, con su pareja, ocurre cuando el radio de adendo del engrane intersecta la normal común. El ángulo de rodado asociado al radio de adendo está dado por:

$$\theta_{o1} = \sqrt{\frac{R_{o1}^2}{R_{b1}^2} - 1} \quad (19)$$

Entonces el punto de contacto más bajo entre el par de dientes cuyo contacto inició para el valor del ángulo de rodado θ_{o1} está dado por el ángulo de rodado θ_{t1} calculado por

$$\theta_{t1} = \theta_{o1} - \theta_{i1} = \sqrt{\frac{R_{o1}^2}{R_{b1}^2} - 1} - \frac{2\pi}{N_1} \quad (20)$$

donde

$$\theta_{i1} = \frac{2\pi}{N_1} \quad \text{y} \quad \theta_{i2} = \frac{2\pi}{N_2}$$

A partir del ángulo θ_{t1} es posible determinar el radio correspondiente al punto de contacto más bajo entre un par de dientes, vea la imagen 2

$$\theta_{t1} = \sqrt{\frac{R_{lt1}^2}{R_{b1}^2} - 1} \quad (21)$$

$$R_{lt1} = R_{b1} \sqrt{\theta_{t1}^2 + 1} \quad (22)$$

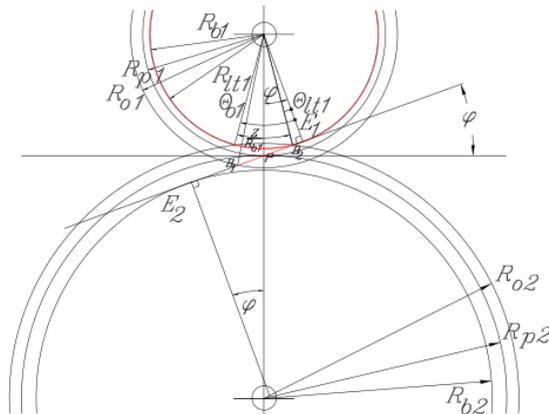


IMAGEN 3: Determinación del punto de contacto más bajo entre un par de dientes.

Determinación del punto de contacto más alto entre un único par de dientes

Para determinar el punto de contacto más alto entre un único par de dientes se requiere determinar la distancia del centro del engrane a al punto B_2 .

$$R_{B2} = \sqrt{R_{b1}^2 + E_1 B_2^2} \quad (23)$$

Entonces

$$\overline{E_1 B_2} = \overline{E_1 E_2} - \overline{E_2 B_2} = C \text{Sen} \phi - \sqrt{R_{o2}^2 - R_{b2}^2} \quad (24)$$

De donde

$$R_{B2} = \sqrt{R_{b1}^2 + (C \text{Sen} \phi_o - \sqrt{R_{o2}^2 - R_{b2}^2})^2} \quad (25)$$

El ángulo de rodado θ_{B2} viene dado por

$$\theta_{B2} = \sqrt{\frac{R_{B2}^2}{R_{b1}^2} - 1} \quad (26)$$

Entonces, el ángulo de rodado hasta el punto de contacto más alto entre un único par de dientes está dado, a partir del punto de contacto más bajo entre un par de dientes.

$$\theta_{h2} = \theta_{t2} + \theta_{i2} \quad (27)$$

El radio correspondiente al ángulo de rodado θ_{h2} está dado por

$$R_{h2} = R_{b1} \sqrt{\theta_{h2}^2 + 1} \quad (28)$$

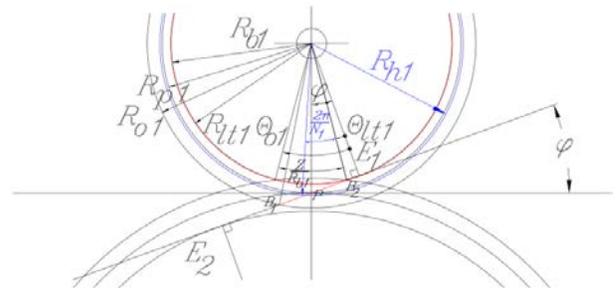


IMAGEN 4: Determinación del punto de contacto más alto entre un único par de dientes.

INTERFASE PARA LA COMPUTACIÓN Y GRAFICACIÓN DE LOS ENGRANES

Con el fin de obtener el perfil de los dientes de los engranes, incluyendo su filete, y eventualmente realizar los cálculos de los coeficientes geométricos de resistencia y durabilidad de los engranes se realizó una interfase gráfica de usuario ---GUI, por su acrónimo en inglés--- en el programa Matlab™, la imagen 4 muestra el perfil completo de un diente de engrane, de paso diametral 2 y con 22 dientes, el valor del ángulo Γ es necesario para dibujar el filete del engrane.

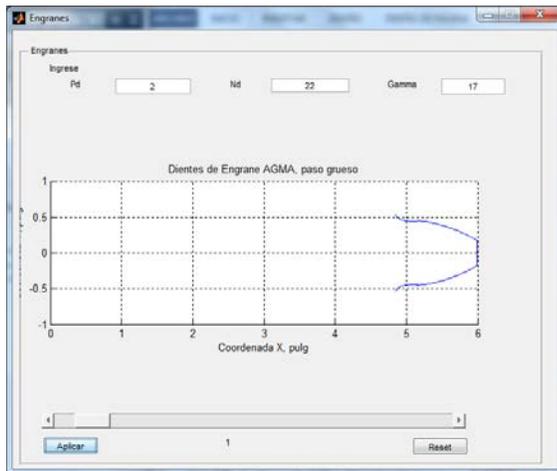


IMAGEN 5: Gráfica del perfil de un único diente incluyendo su filete.

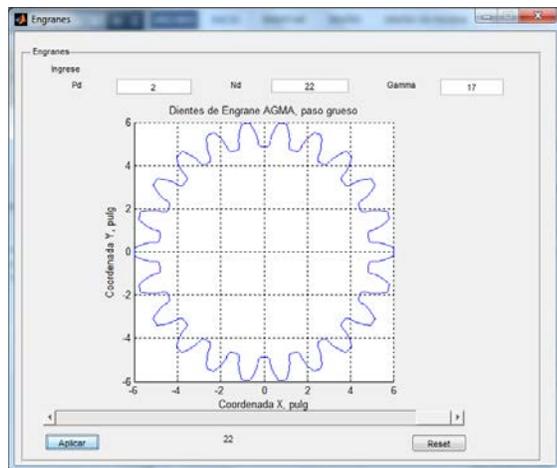


IMAGEN 6: Gráfica del perfil de los dientes del engrane completo.

La imagen 6 muestra el perfil completo del engrane del cual la imagen 5 muestra un único diente.

CONCLUSIONES

Se presentó el análisis cinemático de la operación y la determinación de las posiciones de operación críticas entre un par de engranes. Estas posiciones junto con la determinación precisa del perfil del diente incluyendo el filete, constituyen la

base para determinar los coeficientes geométricos de resistencia y durabilidad [6,7,8].

REFERENCIAS

- [1] Mabie, H. H. & Reinholtz, C. F. (1987), *Mechanisms and Dynamics of Machinery* (4th ed.) New York, N.Y. John Wiley and Sons.
- [2] Colbourne, J. R. (1987), *The Geometry of Involute Gears*, (1st ed), New York, Springer.
- [3] Radzevich, S. P. (2012), *Dudley's Handbook of Practical Gear Design' and Manufacture*, (2nd ed.), Boca Raton: CRC Press.
- [4] Gitche K. R. [1972] *Computed Strength and Durability Geometry Factors for External Spur and Helical Gears with Tooling Check*. ASME Paper No. 72-PTG-18
- [5] Radzevich, S. P. (2010) *Gear Cutting Tools: Fundamentals of Design and Computation*, Boca Raton: CRC Press.
- [6] Anónimo (1952) *DIN 3972: Reference Profiles of Gear-cutting Tools for Involute Tooth Systems according to DIN 867*, Berlin: Beuth-Vertrieb.
- [7] Anónimo (1986) *DIN 867: Basic rack tooth profiles for involute teeth of cylindrical gears for general engineering and heavy engineering*, Berlin: Beuth-Verlag GmbH.
- [8] Anónimo (1989) *AGMA 908-B89: Geometric Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth*. Alexandria, Virginia: American Gear Manufacturers Association.
- [9] Anónimo (2001) *ANSI/AGMA 2001-D04: Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. Alexandria, Virginia: American Gear Manufacturers Association.