JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

ANÁLISIS DINÁMICO INVERSO DE MECANISMOS PLANOS MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS

Valencia Murillo, Carlos Enrique (1), Rico Martínez, José María (2), Cervantes Sánchez, J. Jesús (3)

1 Lic. en Ingeniería Mecánica, Universidad de Guanajuato | ce.valenciamurillo@ugto.mx

2 Dpto. de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato | jrico@ugto.mx

3 Dpto. de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato | jecer@ugto.mx

Resumen

Esta contribución presenta la solución del análisis dinámico inverso de un mecanismo plano de cuatro barras; es decir ---conocidas las dimensiones, propiedades másicas e inerciales de los eslabones de un mecanismo y las fuerzas externas aplicadas al mismo--- determinar el movimiento del mecanismo. La contribución presenta la deducción de la ecuación diferencial, altamente no lineal, que rige el análisis dinámico inverso del mecanismo, su conversión a un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas, su solución numérica empleando el programa de matemática simbólica Maple™ y la comparación, satisfactoria, de estos resultados con los obtenidos mediante el programa de simulación Adams™.

Abstract

The dynamic inverse analysis of a four bar planar linkage is presented in this contribution. The dynamic inverse analysis is defined as: Given the dimensions, mass and inertia properties of the links of the linkage, as well as the external forces applied to the linkage, determine the motion of the linkage. This contribution derives the deduction of the highly nonlinear differential equation that determines the linkage motion, its transformation into a system of differential algebraic equations, DAE, its numeric solution by means of the symbolic mathematical program Maple™ and its satisfactory comparison with the simulation of the linkage using Adams™.

Palabras clave

Palabras Clave 1. Dinámica; 2. Simulación; 3. Maple™; 4. Adams™; 5. Ecuaciones diferenciales.

INTRODUCCIÓN

La currícula tradicional de los programas de ingeniería mecánica incluye la solución del análisis dinámico directo de diferentes tipos de mecanismos. Es decir, conociendo el movimiento del eslabón motriz y las propiedades másicas e inerciales de los eslabones determinar las reacciones en los pares cinemáticos y torque motriz, la solución de este problema requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, el análisis dinámico inverso, definido como, conocidas las propiedades másicas e inerciales de los eslabones y las fuerzas externas aplicadas al mecanismo, determinar su movimiento, no aparece en la currícula de la gran mayoría de esos programas, [1,2]. La razón principal parece ser la dificultad de resolver las ecuaciones diferenciales que resuelven el problema, [3] trata únicamente con cadenas seriales abiertas.

Esta decisión es lamentable pues usando programas de matemática computacional o simbólica es posible evitar, al menos parcialmente, la complejidad de la solución de las ecuaciones diferenciales y permitir a los egresados una visión integradora de los métodos de Newton-Euler y trabajo y energía en la dinámica de cuerpos rígidos y una comprensión básica de los programas de análisis dinámico de mecanismos frecuentemente usados en la industria.

La presente contribución presenta la solución del análisis dinámico inverso de un mecanismo plano de cuatro barras y la comparación de los resultados con aquellos obtenidos mediante un programa dedicado al análisis dinámico de maquinaria.

ANÁLISIS DINÁMICO INVERSO DEL MECANISMO PLANO

Para realizar el análisis dinámico inverso utilizando ecuaciones diferenciales algebraicas se debe encontrar la ecuación de movimiento del mecanismo. Este análisis cinemático del mecanismo que requiere los siguientes pasos:

1. Determinación de los vectores de posición de las revolutas respecto a las revolutas conectadas al eslabón fijo y las ecuaciones vectoriales y escalares de clausura, vea la imagen 1.

   Las ecuaciones escalares de clausura mecanismo en las direcciones ***X*** y ***Y***:

$$\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_4$$

$$a_2 C\theta_2 + a_3 C\theta_3 = a_1 C\theta_1 + a_4 C\theta_4 \qquad (1)$$

$$a_2 S\theta_2 + a_3 S\theta_3 = a_1 S\theta_1 + a_4 S\theta_4 \qquad (2)$$

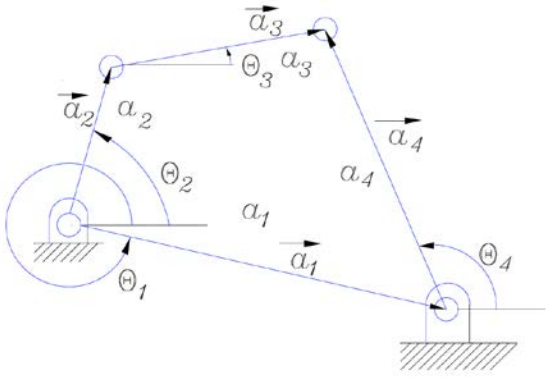

IMAGEN 1: Mecanismo plano de cuatro barras.

2. Determinación de los vectores de posición de los centros de masa de cada eslabón con respecto a la revoluta anterior y los vectores de posición necesarios para la suma de momentos con respecto al centro de masa de cada eslabón, vea la imagen 2.

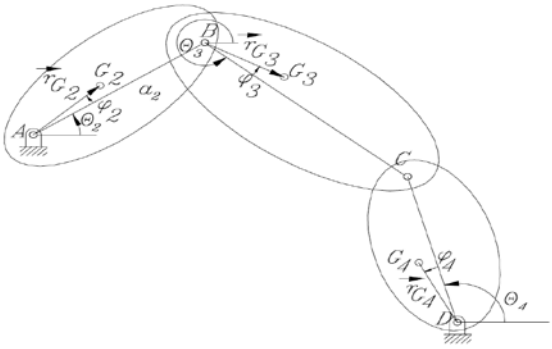

IMAGEN 2: Vectores posición centros de masa.

3. Determinación de las velocidades y aceleraciones de los centros de masa

derivando, respecto al tiempo, los vectores de posición de los centros de masa de cada eslabón.

Con esta parte finaliza el análisis cinemático.

A continuación, se realiza el análisis dinámico utilizando el método de Newton-Euler. En la imagen 3 se muestran los diagramas de cuerpo libre incluyendo las fuerzas de inercia para cada eslabón del mecanismo plano de cuatro barras.

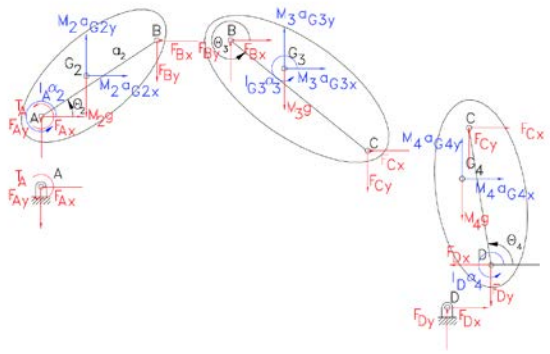

IMAGEN 3: Diagrama de cuerpo libre de cada eslabón.

La segunda ley de Newton permite obtener, para cada eslabón, tres ecuaciones escalares, dos de ellas asociadas a la suma de fuerzas en las direcciones ***X*** y ***Y***.

$$\sum F_x = Ma_x \qquad \sum F_y = Ma_y$$

La tercera ecuación está asociada a la suma de momentos; para el eslabón motriz y seguidor se usa el centro de rotación, de manera que

$$\sum T_O = I_O \cdot \alpha = \left(I_G + Mr_G\right) \cdot \alpha$$

Para el eslabón acoplador se usa el centro de masas, de manera que

$$\sum T_G = I_G \cdot \alpha$$

De las ecuaciones de Newton-Euler se obtiene un sistema de nueve ecuaciones, como el objetivo es obtener la ecuación dinámica de movimiento del mecanismo, las reacciones en los pares cinemáticos no son de interés y deben eliminarse, de manera que no es necesario emplear las nueve ecuaciones. Después de una tediosa manipulación algebraica se obtiene la siguiente ecuación:

$$T_{41}^{*}\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}_4\right)+T_{31}^{*}\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}_3\right)+T_{21}^{*}\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}_2\right) \\ +T_{32}^{*}\left(\dot{\theta}_3\right)^2+T_{22}^{*}\left(\dot{\theta}_2\right)^2+T_i=0 \qquad (3)$$

Donde los términos $T_{41}^{*}, T_{31}^{*}, T_{21}^{*}, T_{32}^{*}, T_{22}^{*}$ y T_i están dados por:

$$T_{41}^{*}=a_2a_3\left(I_4+M_4r_{G_4}^2\right)S\left(\theta_2-\theta_3\right)$$

$$T_{31}^{*}=a_2a_4S\left(\theta_2-\theta_4\right)\left(I_3+M_3r_{G_3}^2\right) \\ +a_2a_3a_4M_3r_{G_3}C\left(\theta_2-\theta_3-\varphi_3\right)S\left(\theta_4-\theta_3\right)$$

$$T_{21}^{*}=a_3a_4S\left(\theta_4-\theta_3\right)\left(I_2+M_2r_{G_2}^2\right)+a_2^2a_3a_4M_3S\left(\theta_4-\theta_3\right) \\ +a_2^2a_4M_3r_{G_3}\left[C\theta_4S\left(\theta_3+\varphi_3\right)-C\theta_2S\left(\theta_3+\varphi_3+\theta_4-\theta_2\right)\right]$$

$$T_{32}^{*}=a_2a_3a_4M_3r_{G_3}S\left(\theta_2-\theta_3-\varphi_3\right)S\left(\theta_4-\theta_3\right)$$

$$T_{22}^{*}=a_2^2a_4M_3r_{G_3}\left[C\theta_2C\left(\theta_3+\varphi_3+\theta_4-\theta_2\right)-C\theta_4C\left(\theta_3+\varphi_3\right)\right]$$

$$T_i=a_3a_4T_AS\left(\theta_3-\theta_4\right)+a_3a_4M_2gr_{G_2}C\left(\theta_2+\varphi_2\right)S\left(\theta_4-\theta_3\right) \\ +a_2a_3a_4M_3gC\theta_2S\left(\theta_4-\theta_3\right) \\ +a_2a_4M_3gr_{G_3}C\left(\theta_3+\varphi_3\right)S\left(\theta_2-\theta_4\right) \\ +a_2a_3M_4gr_{G_4}C\left(\theta_4+\varphi_4\right)S\left(\theta_2-\theta_3\right)$$

Donde T_A es el torque motriz aplicado al eslabón motriz y g la gravedad.

La ecuación (3) es la ecuación de movimiento del mecanismo plano de cuatro barras y con esto termina el análisis dinámico. Es importante notar que la ecuación (3) representa una ecuación diferencial de segundo orden altamente no lineal en las incógnitas θ_2, θ_3 y θ_4.

Para resolver este problema es necesario replantear la ecuación (3) como un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas, DAE por sus siglas en inglés, para tal fin, es necesario:

Definir las velocidades angulares de cada eslabón por lo que se tiene:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{d}{dt}\theta_2 \quad (4) \qquad \dot{\theta}_3 = \frac{d}{dt}\theta_3 \quad (5) \qquad \dot{\theta}_4 = \frac{d}{dt}\theta_4 \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas que rige el análisis dinámico inverso está formado por las ecuaciones (1-6).

El torque motriz aplicado al eslabón motriz varía respecto al tiempo y se supone que está dado por:

$$T_A = 20 - 4.774\dot{\theta}_2$$

Solución del sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas

El sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas se tiene que resolver numéricamente. Para este fin se deben definir las condiciones iniciales del mecanismo, que se encuentra inicialmente en reposo y con la solución del análisis de posición indicado por:

$$\theta_2(0) = \pi \text{ rad} \qquad \dot{\theta}_2(0) = 0$$
$$\theta_3(0) = 0.58568 \text{ rad} \qquad \dot{\theta}_3(0) = 0$$
$$\theta_4(0) = 2.55590 \text{ rad} \qquad \dot{\theta}_4(0) = 0$$

Los parámetros geométricos, de masa y de inercia considerados son:

$$a_2 = 0.2\ m \quad I_2 = 4.2076\ E^{-2}\ kg \cdot m^2 \quad m_2 = 5.27913\ kg$$
$$a_3 = 0.6\ m \quad I_3 = 017312\ kg \cdot m^2 \quad m_3 = 4.78924\ kg$$
$$a_4 = 0.6\ m \quad I_4 = 015103\ kg \cdot m^2 \quad m_4 = 3.44054\ kg$$
$$r_{G_2} = 0\ m \quad \varphi_2 = 0 \quad a_1 = 0.8\ m$$
$$r_{G_3} = 0.3\ m \quad \varphi_3 = 0 \quad g = 9.81\ m/s^2$$
$$r_{G_4} = 0.3\ m \quad \varphi_4 = 0$$

Para la solución numérica se emplea el programa Maple™, el comando *dsolve*, eligiendo un algoritmo Runge-Kutta de orden 4 y 5.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan las gráficas obtenidas para la solución numérica del mecanismo plano de cuatro barras, mediante el programa Maple™ así como gráficas obtenidas, para la verificación de la solución numérica, de la simulación del mecanismo de cuatro barras en el programa Adams™. Para la simulación se creo un modelo CAD del mecanismo que tiene los mismos parámetros geométricos, de masa y de inercia utilizados en la solución numérica mediante Maple™. El modelo del mecanismo se muestra en la imagen 4.

IMAGEN 4: Modelo del mecanismo de cuatro barras realizado en SolidWorks.

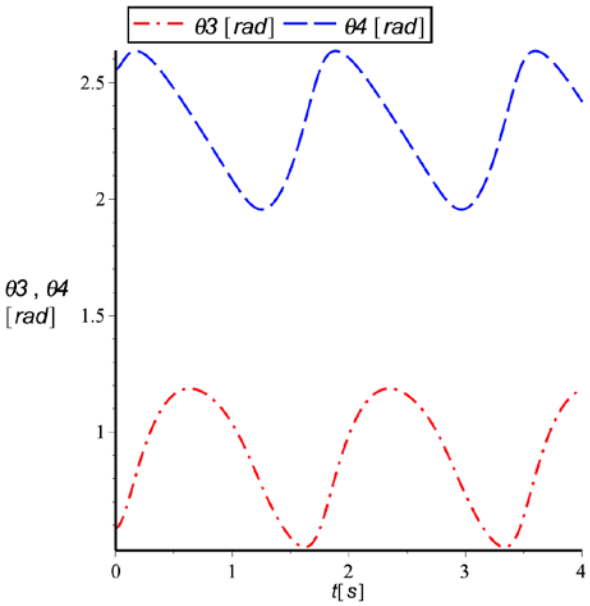

IMAGEN 5: Desplazamiento angular de los eslabones 2 y 3 obtenidas mediante Maple™.

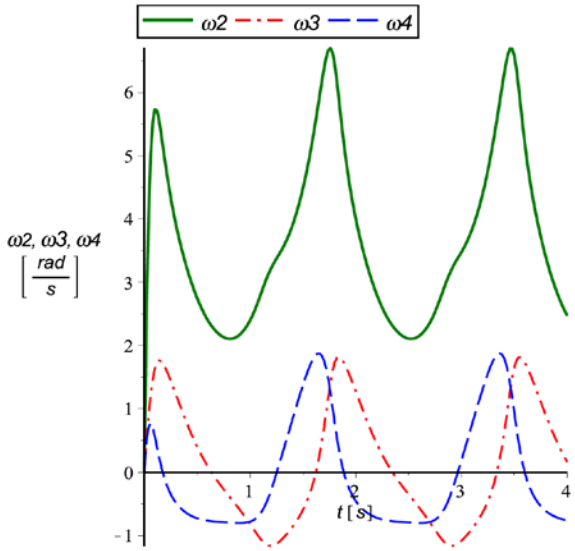

IMAGEN 6: Velocidades angulares de los eslabones 2, 3 y 4 obtenidas mediante Maple™.

Los resultados obtenidos mediante Maple™ y Adams™ mostrados en las imágenes 6 y 7 que corresponden a las velocidades angulares de los tres eslabones móviles del mecanismo, coinciden con bastante precisión.

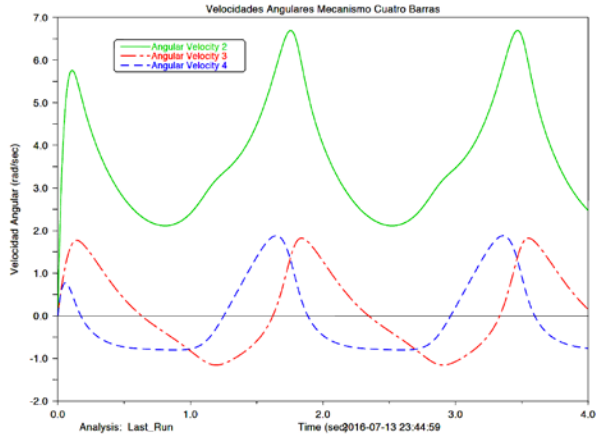

IMAGEN 7: Velocidades angulares de los eslabones 2, 3 y 4 obtenidas mediante Adams™.

Finalmente, la imagen 8, muestra los errores, menores a 1E=07, asociados a la satisfacción de las ecuaciones de clausura del mecanismo.

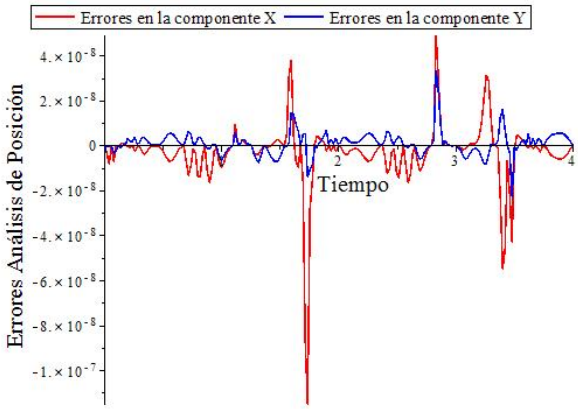

IMAGEN 8: Errores en la solución del análisis de posición del mecanismo plano de cuatro barras, en Maple™.

CONCLUSIONES

Se presentó el análisis dinámico inverso de un mecanismo plano de cuatro barras, derivando la ecuación que rige el movimiento del mecanismo, transformándola en un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas y resolviendo el sistema mediante un programa de matemática simbólica. Además, se comparan, satisfactoriamente, los resultados con una simulación del mismo mecanismo, empleando un programa muy conocido. A partir de los resultados se puede simular el movimiento del mecanismo.

Debido a limitaciones de espacio, no se presentan los resultados correspondientes a un mecanismo plano de manivela biela corredera y a otro de retorno rápido de un cepillo mecánico.

REFERENCIAS

[1] Mabie, H. H. & Reinholtz, C. F. (1987), Mechanisms and Dynamics of Machinery (4th ed.) New York, N.Y. John Wiley and Sons.
[2] Mata, A. S., Torras, A. B., Cabrera Carrillo, J. A., Ezquerro Juanco, F., Guerra Fernández, A. J., Nadal Martínez, F. & Ortiz Fernández, A. (2016), Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms, (1st ed.), Cham, Switzerland, Springer.
[3] Marghitu, D. B. (2009), Mechanisms and Robots Analysis with MATLABTM (1st ed.), London: Springer.